مجموع جملات دنباله حسابی

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \dots$$

در یک دنبالهٔ حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d جملهٔ عمومی (جمله nاُم) به صورت روبه‌رو است: $a_n = a_1 + (n-1)d$

برای به دست آوردن مجموع n جملهٔ اول دنباله حسابی از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

دراین‌رابطه a_1 جمله‌اول، n تعدادجملات‌و d قدرنسبت‌دنباله‌می‌باشد.

در دنباله حسابی، فرض کنید a_1 جمله اول، a_n جمله آخر و n تعداد جملات باشد. در این صورت: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

سوال ۱:

حداقل چند جمله ی اول از دنباله ی حسابی .... و ۱۵ و ۹ و ۳ را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

سوال ۲:

مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

سوال ۳:

در ۲۰ جمله ی اول یک دنباله ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد. جمله ی اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

مجموع جملات دنباله هندسی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید، این عدد ثابت را با q یا r نمایش می‌دهیم و به آن قدرنسبت دنباله می‌گوییم.

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \xrightarrow{\times q} \dots$$

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q جمله عمومی به صورت روبه‌رو است: $a_n = a_1 q^{n-1}$

برای به دست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی از جملهٔ اول (a_1) تا جمله nاُم (a_n) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم ($q \neq 1$):

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

سوال ٤:

جمله ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 3^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر ۳۶۴ شود؟

سوال ۵:

برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیو اکتیو لایه های محافظی قرار دارد که شدت تابش پرتو ها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک حداقل ۹۰٪ کاهش یابد؟

حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم

برای معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ $(\Delta>0)$ داریم:

مجموع دو ریشه $=S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب دو ریشه $=P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

سوال ۶:

در معادله ی $7x^2-28x=42$ ، بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

ساختن معادله درجه دوم

فرض کنید می‌خواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه‌های آن دو عدد حقیقی a و b باشند. در این صورت اگر $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\cdot\beta$ باشند آن‌گاه معادله درجه دوم مورد نظر برابر است با: $x^2-Sx+P=0$

می‌توان طرفین معادله به دست آمده را در عدد حقیقی غیر صفر دلخواه a ضرب کرد: $a(x^2-Sx+P)=0$

سوال ۷:

محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۲ متر و مساحت آن ۲۸ متر مربع است. ابعاد زمین را مشخص کنید.

سوال ۸:

معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{3}-2$ باشد.

ماکزیمم و مینیمم تابع درجه دو

تابع چند جمله‌ای درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ را تابع سهمی می‌نامیم.

اگر $a>0$ آن‌گاه سهمی دارای کمترین مقدار (min) و اگر $a<0$ آن‌گاه سهمی دارای بیشترین مقدار (max) است. نقطهٔ A (شکل‌های بالا) را رأس سهمی می‌نامیم که مختصات آن به شکل زیر می‌باشد: مقدار min سهمی (در حالت $a>0$) یا max سهمی (در حالت $a<0$) برابر $y_A=\frac{-\Delta}{4a}$ است.

$$A\left|\begin{array}{l} x_A=\frac{-b}{2a} \\ y_A=\frac{-\Delta}{4a}\end{array}\right.$$

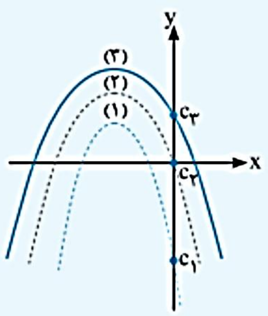
سوال ۹:

مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع $f(x)=-3x^2+6x+1$ را به دست آورید.

ساختن معادله درجه

۱ از روی جهت دهانهٔ سهمی، علامت a مشخص می‌شود.

۲ در نمودار سهمی مربوطه، c برابر عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها است.

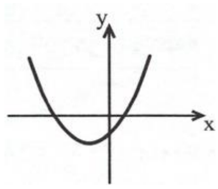


$$\Rightarrow\begin{cases}(1)\Rightarrow f(0)=c_1<0\\(2)\Rightarrow f(0)=c_2=0\\(3)\Rightarrow f(0)=c_3>0\end{cases}$$

۳- برای تعیین علامت b به شیب نمودار در نقطه c توجه میکنیم

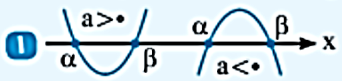
سوال ۱۰:

در شکل مقابل، نمودار سهمی $y = ax^{2} + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a ، b و c و تعداد و علامت صفر های آن را مشخص کنید.

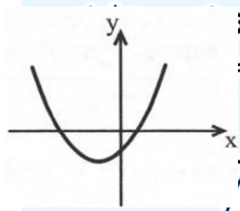


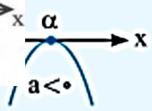
نوشتن معادله تابع درجه دو

رابطه نمودار سهمی و تعداد ریشه‌های آن:

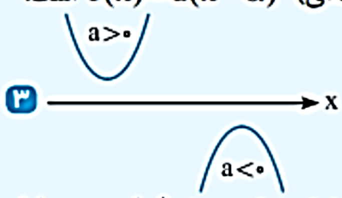


در این حالت، سهمی دو ریشه حقیقی متمایز
معادله سهمی به شکل $a(x-\alpha)(x-\beta)$





در این حالت، سهمی ریشه مضاعف دارد و $\Delta = 0$ است. معادله سهمی به شکل (اتحاد دو جمله‌ای) $f(x) = a(x-\alpha)^{2}$ است.

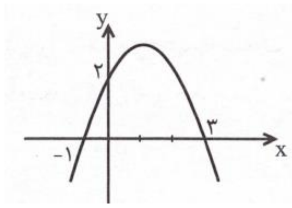


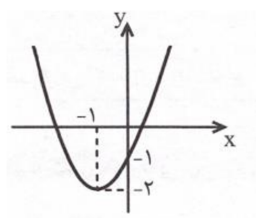
در این حالت، سهمی ریشه حقیقی ندارد و $\Delta < 0$ است و معادله سهمی تجزیه نمی‌شود.

تذکر: در حالتی که سهمی ریشه مضاعف $x = \alpha$ دارد، می‌گوییم تابع در $x = \alpha$ بر محور x ها مماس است.

سوال ۱۱:

با توجه به نمودار سهمی در شکل زیر، ضابطه آن را به دست آورید.





حل معادله درجه دوم و تغییر متغیر

صورت کلی یک معادله درجه دوم به شکل زیر است:

$ax^{2} + bx + c = 0 \quad , \quad a \neq 0$

برای هر معادله درجه ۲، دلتا (مبین معادله) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\Delta = b^{2} - 4ac$

دلتا تعیین‌کننده تعداد ریشه‌های معادله درجه ۲ است. با توجه به علامت دلتا سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱) $\Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (معادله، دو ریشه حقیقی متمایز دارد.)

۲) $\Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$ (معادله ریشه مضاعف دارد.)

۳) $\Delta < 0$ (معادله ریشه حقیقی ندارد.)

برای حل برخی معادلات، می‌توان با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب آن‌ها را به معادله درجه ۲ تبدیل کرد.

سوال ۱۲:

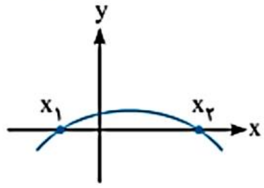
معادله $x^{4} - 13x^{2} + 36 = 0$ را حل کنید.

سوال ۱۳:

معادله $(4 - x^{2})^{2} - 2(4 - x^{2}) - 15 = 0$ را حل کنید.

صفر های تابع

نقاط برخورد یک تابع با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. به عبارت دیگر مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است. (x_1 و x_2 صفرهای تابع‌اند.)



سوال ۱۴:

a را چنان بیابید که یک جواب معادله $x^3 - 3x^2 + ax + 24 = 0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب های دیگر را به دست آورید.

معادله گویا و روش حل آن

به معادله‌ای که مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای) قراردارد، معادلهٔ گویا می‌گویند.

برای حل معادلات گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود و جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند. هم‌چنین این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

سوال ۱۵:

معادله $\frac{3x}{x+2} = \frac{x^2+2}{x^2+x-2} + \frac{2x+1}{x-1}$ را حل کنید.

سوال ۱۶:

دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. اگر شیر A به تنهایی باز باشد، استخر ۸ ساعت زودتر از حالتی که شیر B به تنهایی باز است پر می شود. اگر دو شیر با هم باز باشند، استخر در ۳ ساعت پر می شود. هر کدام از شیر های A و B به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می کنند؟

معادله رادیکالی (معادله گنگ)

برخی از معادلات که شامل عبارات رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامیم. برای حل یک معادله گنگ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) با به توان‌رسانی طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم.

۲) پاسخ‌های به دست آمده از معادله اخیر را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم.

سوال ۱۷:

معادله $2\sqrt{4x+1} - x = 4$ را حل کنید.

سوال ۱۸:

معادله $\sqrt{۲x+۱} - ۲\sqrt{x+۱} + ۳ = ۰$ را حل کنید.

به عبارت‌هایی به شکل $|A|$ یا $B^{\text{زوج}}$ یا $\sqrt[\text{زوج}]{C}$ عبارت‌های همواره نامنفی می‌گوییم. اگر مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر شود، آن‌گاه تک‌تک این عبارات صفر هستند. در این صورت ریشه‌ای مورد قبول است که بین همه عبارات مشترک باشد.

سوال ۱۹:

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (با ذکر دلیل)

معادله ی $\sqrt{x+۲} + ۳\sqrt{x-۱} = ۰$ جواب حقیقی ندارد.

قدرمطلق

فرض کنید a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق عدد a را با نماد $|a|$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|a| = \begin{cases} a & ; \ a \geq ۰ \\ -a & ; \ a < ۰ \end{cases}$$

$a \geq ۰ \Leftrightarrow |a| = a$ (خود a بیرون می‌آید.)

$a < ۰ \Leftrightarrow |a| = -a$ (قرینهٔ a بیرون می‌آید.)

گاهی عبارت داخل قدرمطلق، در دامنهٔ خود تغییر علامت می‌دهد، یعنی به ازای برخی مقادیر x، صفر یا مثبت و به ازای برخی دیگر از مقادیر x، منفی می‌باشد. در این صورت با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، می‌توانیم آن را به شکل تابع چند ضابطه‌ای بنویسیم:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; \ f(x) \geq ۰ \ \text{برای x هایی‌که به ازای آن ها} \\ -f(x) & ; \ f(x) < ۰ \ \text{برای x هایی‌که به ازای آن ها} \end{cases}$$

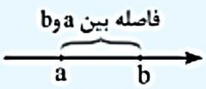
سوال ۲۰:

با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = |x^۲ - ۱|$

نمایش فاصله‌ای قدرمطلق



فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند. در این صورت فاصله این دو عدد برابر $|a-b|$ است.

سوال ۲۱:

عبارت زیر را با نماد قدرمطلق به صورت یک نامعادله بنویسید و سپس جواب را روی محور اعداد نشان دهید.

«فاصله ی بین x و ۲- بزرگتر از ۳ است»

سوال ۲۲:

نقاطی روی محور اعداد حقیقی بیابید که فاصله آن ها از عدد ۵ برابر ۷ باشد.

خواص قدرمطلق

۱) $|x| \geq 0$ قدرمطلق عبارتی نامنفی است.

۲) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (قدرمطلق وقتی صفر است که عبارت داخل آن صفر باشد.)

۳) $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$

۴) $|x| \neq \pm x \;,\; x \neq 0$

۵) $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a \quad (a \geq 0)$

۶) $|x| = |a| \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$

۷) $|x|^2 = x^2$

۸) $|-x| = |x|$

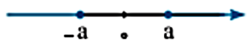
۹) $|xy| = |x||y|$

۱۰) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

سه نامساوی مهم زیر را به خاطر می‌سپاریم:

۱) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0)$

۲) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a \quad (a \geq 0)$

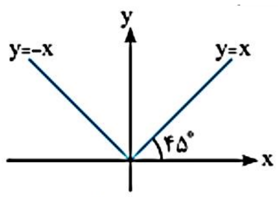


۳) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(نامساوی مثلثی یا نامساوی حمار)

نمودار های قدرمطلق

۱) نمودار $f(x) = |x|$



۲) نمودارهایی که با انتقال از روی $y = |x|$ به دست می‌آیند.

فرض کنید می‌خواهیم نمودار $y = |x \pm a| \pm b$ را با استفاده از انتقال از روی نمودار $y = |x|$ رسم کنیم: $(a , b > 0)$

در این گونه نمودارها، ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می‌کنیم، سپس:

الف) در حالت $+a$، نمودار $|x|$ را a واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

ب) در حالت $-a$، نمودار $|x|$ را a واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

پ) در حالت $+b$، نمودار را b واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

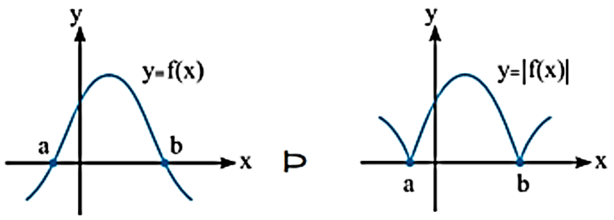
ت) در حالت $-b$، نمودار را b واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

۳) نمودارهای $y = f(-x)$

و برای رسم نمودار $y = f(-x)$، نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم

۴) نمودار $y = |f(x)|$

برای رسم این‌گونه نمودارها، ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کرده، سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیرمحور x ها (یعنی $y < 0$) قرار دارند را آینه‌وار به بالای محور x ها، منتقل می‌کنیم.



۵) نمودارهایی که به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌شوند.

با روشی که قبلاً یاد گرفتیم، تابع را به حالت چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

سوال ۲۳:

با استفاده از تعیین علامت، تابع $f(x) = |x| - |x - 1|$ را بدون قدرمطلق نوشته و نمودار آن را رسم کنید.

سوال ۲۴:

نمودار تابع $f(x) = |x^{۲} - ۴x|$ را رسم کنید.

معادلات قدرمطلق

معادلات قدرمطلقی را می‌توان به ۴ نوع تقسیم‌بندی کرد:

نوع اول: معادلاتی که با استفاده از ویژگی زیر حل می‌شوند:

$|x| = a \underset{(a\geq ۰)}{\Leftrightarrow} x = a$ یا $x = -a$

سوال ۲۵:

معادله $|۳x + ۲| = |x - ۴|$ را حل کنید.

نوع دوم: معادلاتی به شکل $|f(x)| = g(x)$

ابتدا توجه کنیم که باید $g(x) \geq ۰$ باشد (چون با قدرمطلق برابر شده است.) با اِعمال این شرط، این گونه معادلات را می‌توان به ۲ حالت حل کرد.

حالت اول:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{یا} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

جواب‌های معادلات بالا به شرطی که در $g(x) \geq ۰$ صدق کنند، جواب معادله هستند. (مورد قبول می‌باشند.)

حالت دوم: به توان ۲ رساندن طرفین:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f^{۲}(x) = g^{۲}(x)$$

جواب‌های معادله بالا به شرطی که در $g(x) \geq ۰$ صدق کنند، مورد قبول هستند.

سوال ۲۶:

معادله $|x - ۱| + ۳ - ۲x = ۱۰$ را حل نمایید.

نوع سوم: معادلاتی که باید به حالت چند ضابطه‌ای تبدیل شوند:

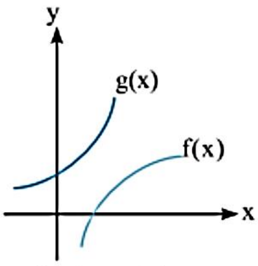
روش تبدیل به حالت چند ضابطه‌ای را قبلاً فرا گرفته‌ایم. فقط در حل معادلات باید دقت شود که ریشه‌ای مورد قبول است که در شرط ناحیه فرض شده، صدق کند.

سوال ۲۷:

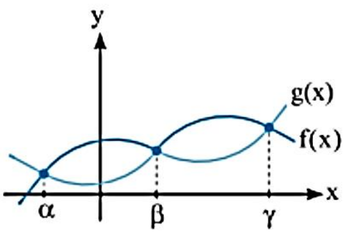
معادله $|x| = x^{۲} - ۲x$ را به روش جبری حل کنید.

نوع چهارم: حل معادلات به روش هندسی

به طور کلی برای حل معادلات $f(x) = g(x)$ به روش هندسی هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. محل برخورد دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$، جواب‌های معادله می‌باشند.



معادله $f(x) = g(x)$ جواب ندارد.



α, β, γ جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ هستند.

تذکر: روش هندسی، معمولاً مقدار دقیق جواب را مشخص نمی‌کند و بیشتر برای یافتن تعداد جواب استفاده می‌شود.

سوال ۲۸:

تعداد و مقدار تقریبی ریشه های معادله $|x-۱| = x^۲ - x - ۱$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

سوال ۲۹:

نمودار تابع $f(x) = \big||x| - ۳\big|$ را رسم کنید. سپس معادله $f(x) = ۲$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری حل نمایید.

وضعیت دو خط

۱ فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ دو خط راست روی صفحه، با شیب‌های به ترتیب $m_۱$ و $m_۲$ باشند. در این صورت:

الف) $L_۱$ و $L_۲$ موازی‌اند اگر و تنها اگر $m_۱ = m_۲$ باشد.

ب) $L_۱$ و $L_۲$ برهم عمودند اگر و تنها اگر $m_۱$ و $m_۲$ عکس و قرینه یکدیگر باشند به عبارت دیگر $m_۱m_۲ = -۱$ باشد.

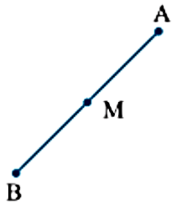
سوال ۳۰:

اگر $A(۲,-۱)$ و $B(۴,۷)$ دو سر یک پاره خط باشند، معادله عمود منصف پاره خط AB را به دست آورید.

کاربرد های مختصات دو نقطه

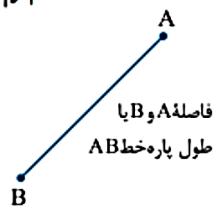
۱ مختصات وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه A و B:

$$M\left|\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} \end{array}\right.$$



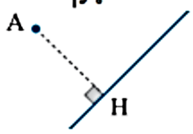
۲ فاصله دو نقطه $A\left|\begin{array}{l}x_۱\\y_۱\end{array}\right.$ و $B\left|\begin{array}{l}x_۲\\y_۲\end{array}\right.$:

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$



۳ فاصله نقطه $A\left|\begin{array}{l}x_۰\\y_۰\end{array}\right.$ از خط به معادله $ax + by + c = ۰$:

$$|AH| = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$



سوال ۳۱:

مثلث با رأس های $A(۲,۳)$ و $B(۲,۸)$ و $C(-۲,۶)$ را در نظر بگیرید. ابتدا طول میانه AM را به دست آورید، سپس معادله میانه AM را بنویسید.

سوال ۳۲:

خط $۲x + ۳y = ۲$ معادله یک ضلع مربع و نقطه $A(۲,-۱)$ مختصات یک رأس آن است. مساحت مربع را به دست آورید.

سوال ۳۳:

در مثلث ABC با رئوس $A(-۱,۷)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(۳,۳)$ ، طول ارتفاع AH را بیابید.

سوال ۳۴:

اگر فاصله نقطه $A(۴,۰)$ از خط $ax+۳y=-۶$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

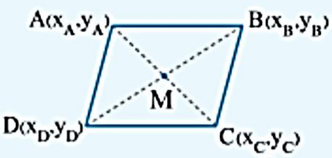
سوال ۳۵:

دو خط $۲x-y=۷$ و $۲y+x=۶$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه ی $A(۸,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

سوال ۳۶:

نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله های آن تا مبدأ مختصات ونقطه ی $A(۲,۴)$ برابر $۵\sqrt{۵}$ باشد.

رابطه مختصات راس های متوازی الاضلاع



در متوازی‌الاضلاع ABCD، با توجه به این‌که قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، می‌توان گفت:

$$\text{ABCD متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

سوال ۳۷:

اگر $A(۱,۲)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(-۱,-۲)$ سه رأس یک مثلث باشند؛

الف) معادله ی ارتفاع AH را به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان بیابید که چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد.

فاصله دو خط موازی

۲ فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

دقت کنیم که ضرایب x و y در هر دو خط، یکسان هستند و سمت راست هر دو خط برابر صفر می‌باشند.

سوال ۳۸:

دو رأس مجاور یک مربع روی خطوط $3x-4y=1$ و $6x-8y=12$ قرار دارند. مساحت مربع را به دست آورید.