فصل اول:

آشنایی با نظریه‌ی اعداد

از این فصل در امتحان ترم اول ۱۵ نمره و در ترم دوم ۵ نمره و اگر خرداد مردود شوید در امتحان شهریور ۷ نمره دارد.

درس ۱ – استدلال ریاضی

تعریف استدلال: درک وفهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی است.

انواع استدلال:

۱– مثال نقض: آوردن یک مثال است که درستی یک حکم را در حالت کلی رد می‌کند.

توجه: مثال نقض اصلاً روش اثبات نیست و فقط برای نشان دادن نادرستی حکم استفاده می‌شود.

مثال) آیا $۲^n + ۱$ همواره عددی اول است؟ خیر با قرار دادن $n = ۹$ داریم $۲^۹ + ۱ = ۵۱۳$ که عددی است بر ۳ بخش‌پذیر.

یادآوری: عدد اول یعنی بر هیچ عددی به جز ۱و خودش بخش‌پذیر نباشد.

۲– اثبات مستقیم: برای اثبات مستقیم ابتدا باید قضیه خواسته شده را به زبان ریاضی بنویسیم و بعد با اصول و قواعد صحیح ریاضی نتیجه‌گیری می‌کنیم

برای انجام اثبات مستقیم به نمایش‌های زیر توجه کنید.

(عددزوج: $۲k$) (عدد فرد: $۲k + ۱$) (عدد مضرب n: nk) (عدد مربع کامل $k^۲$) (عدد مکعب کامل $k^۳$) (عدد مربع کامل فرد $^۲(۲k + ۱)$) (دو عدد فرد متفاوت $۲k + ۱, ۲k' + ۱$) (دو عدد فرد متوالی $۲k + ۱, ۲k - ۱$) (دو عدد زوج متفاوت $۲k, ۲k'$) (دو عدد زوج متوالی $۲k, ۲k + ۲$) (عددگویا $\frac{a}{b} | b \neq ۰$) (عددصحیح k) (دو عدد صحیح متوالی $k, k + ۱$)

تمرین) ثابت کنید تفاضل مکعب دو عدد صحیح متوالی در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده ۱ دارد.

تمرین) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n} + ۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

تمرین) هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ج) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

چ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

۳- اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه‌ی موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن عبارت را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد.با توجه به هم‌ارزی

$p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوه‌ی اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره‌ی دلخواه داریم: $P_1 \vee P_2 \vee \ldots P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \ldots (P_n \Rightarrow r)$

تمرین) ثابت کنید برای هر عددی طبیعی n، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

تمرین) ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عبارت $3n^2 + n + 5$ عددی فرد است؟

تمرین) ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

تمرین) ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی باشند و $xy + ۱ = x + y$ آنگاه $x = ۱$ یا $y = ۱$.

تمرین) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.

تمرین) $A = \{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ است و $n \in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

۴- اثبات غیر مستقیم (اثبات به روش برهان خلف)

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیر مستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیر ممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات ومحاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه مورد نظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

تمرین) ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

تمرین) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

تمرین) a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

تمرین) درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۵– اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم.

در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P، Q و R سه گزاره باشند و $R \Leftrightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow P$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی و یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر: آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

تمرین) ترکیب دو شرطی $(a,b \in \mathbb{R})$، $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ درست نیست (چرا؟)

تمرین) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

تمرین) اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

تمرین) ثابت کنید $\frac{3 + x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq x + y + z$

تمرین) ثابت کنید (اگر x عددی حقیقی و مثبت باشد آنگاه $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} \geq 2$)

تمرین) ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.

تمرین) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^{2} + ab + b^{2} \geq 0$

تمرین) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^{2} هم ارزند؟

تمرین) آیا دو گزاره زیر هم ارزند؟

۱- نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

۲- فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است.

تمرین) گزاره های زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y داریم:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} \geq xy + yz + zx$$

پ) برای هر سه عدد حقیقی x و y داریم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

تمرین) عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری که $x^3 < x^2$.

تمرین) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

تمرین) آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x+y)^2$

تمرین) آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a + b \neq 0)$$

تمرین) گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

درس ۲ – بخش‌پذیری در اعداد صحیح

عاد کردن:

عدد صحیح a، که مخالف صفر است، شمارنده‌ی عدد b است – یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است – هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b = aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

تمرین) به ازای رابطه‌های $x|15$ و $y|90$ چند عدد دو رقمی قابل قبول برای x و y در مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد؟

نکته: برای چک کردن روابط عاد کردن می‌توانید آن‌ها را ۹۰ درجه در جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) بچرخانید و آنرا تبدیل به کسر کنید. اگر حاصل کسر عددی صحیح شود، رابطه عاد کردن درست است.

تمرین) درستی روابط زیر را بررسی کنید.

۱) $16|4$ ۲) $17|51$ ۳) $-3|48$

۴) $2^7|2^3$ ۵) $2^5|2^8$ ۶) $a|0$

تمرین) چند عدد سه‌رقمی داریم که ۵۵ آن‌ها را عاد کند؟

تمرین) با توجه به تعریف رابطه‌ی عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7|63 \Rightarrow 63 = \cdots \times \ldots$

ب) $91 = 7 \times \ldots \Leftrightarrow \cdots|91$

پ) $-6|54 \Leftrightarrow \cdots = \cdots \times (-6)$

ت) $5|-35 \Leftrightarrow \cdots = 5 \times \ldots$

ث) $0 = 18 \times \ldots \Leftrightarrow 18|\ldots$

ج) $a|1 \Rightarrow a = \cdots$ یا $a = \cdots$

چ) $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2|\ldots$ و $\ldots|26$

تمرین) با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $3^5|3^9$ و سپس ثابت کنید:

$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m|a^n$

ویژگی‌های رابطه‌ی عاد کردن

ویژگی ۱: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی: $a|b \Rightarrow a|mb$

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه b^2 را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n \in \mathbb{N}$ است.

یعنی:
الف) $a|b \Rightarrow a|b^2$
ب) $a|b \Rightarrow a|b^n$

تمرین) ویژگی ۱ را اثبات کنید.

تمرین) آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید:

الف) $3|9$ و $3|6$ و $3|6 \times 9$

ب) $3 \nmid 5$ و $3|6$ و $3|6 \times 5$

ج) $6 \nmid 4$ و $6 \nmid 3$ و $6|3 \times 4$

تمرین) آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k \in \mathbb{Z})$

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد. $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

این خاصیت را **«خاصیت تعدّی»** برای رابطه‌ی عاد کردن می‌نامیم.

تمرین) ویژگی ۲ را اثبات کنید.

تمرین) با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطه‌ی عاد کردن، نشان دهید که:

$a|b \Rightarrow a|b^n$

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$

تمرین) ویژگی ۳ را اثبات کنید.

تمرین) آیا از اینکه $a|b + c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟

ویژگی۴: اگر $a|b$ و $b \neq 0$ دراین‌صورت $|a| \leq |b|$.

تمرین) ویژگی۴ را اثبات کنید.

نتیجه: اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

تمرین) اثبات کنید اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

تمرین) اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m + 6)$ و $(6m + 5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

تمرین) اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$

تمرین) اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

تمرین) اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$. (از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید) .

اعداد اول: مجموعه‌ی نامتناهی هستند که شمارنده مثبتی به جز یک و خودشان ندارند، مجموعه‌ی زیر اعداد اول را نشان می‌دهد.

مجموعه اعدا اول: $p = \{2,3,5,7,11,13,17,23,29,31,37,43, \dots\}$

نکته: اگر p عددی اول باشد $a|p$ و دراین‌صورت $a = \pm 1$ یا $a = \pm p$.

تمرین) اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k + 7)$ و $(7k + 6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 5$.

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک

تعریف: عدد طبیعی d را ب‌م‌م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $(a, b) = d$.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$

معنی الف) یعنی d مقسوم علیه a و b باشد.

معنی ب) یعنی d از سایر مقسوم علیه‌های دیگر بزرگ‌تر باشد.

نکته: دو عدد نسبت به هم اول هستند اگر ب‌م‌م آن‌ها ۱ شود.

تمرین) درستی روابط مقابل را بررسی کنید.

$(۳,۴) = ۱$, $(۴,۹) = ۱$, $(۷,۱۱) = ۱$, $(۱,۱۲) = ۱$

$(٦,۹) = ۳$, $(۸,۱٦) = ۸$, $(۰,٦) = ٦$, $(۴,-٦) = ۲$

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

تعریف: عدد طبیعی c را ک‌م‌م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b] = c$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $[a,b] = c$

الف) $a|c, b|c$

ب) $\forall m > ۰; a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$

تمرین) درستی روابط مقابل را بررسی کنید.

$[۱,۸] = ۸$ $[٦,۴] = ۱۲$ $[-۴,۱٦] = ۱٦$ $[۳,۴]=۱۲$

۱- با توجه به تعاریف ب‌م‌م و ک‌م‌م ثابت کنید:

الف) $a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b] = |b|$

نحوه محاسبه ب‌م‌م:

ابتدا عددهای داده شده را به عوامل اول تجزیه کنید. پس عامل‌های مشترک با کم‌ترین توان موجود را در هم ضرب کنید.

نحوه محاسبه ک‌م‌م:

ابتدا عددهای داده شده را به عوامل اول تجزیه کنید. ضرب همه‌ی عامل‌های مشترک و غیر مشترک با بزرگ‌ترین توان ک‌م‌م است.

تمرین) اگر a عددی صحیح باشد حاصل $([a^۲,a^۴],(a,a^۳))$ چند است؟

تمرین) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

تمرین) ثابت کنید $۹n + ۴$ و $۱۱n + ۵$ نسبت به هم اول هستند.

قضیه تقسیم و کاربردها

قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد دراین‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

تمرین) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، دراین‌صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(5n - 2m)$ بر ۱۷ را بدست آورید.

تمرین) باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم ۴۱− بر ۷ را بنویسید.

تمرین) باقی‌مانده تقسیم a و b بر ۱۳ برابر ۷ و ۱۱ است باقی‌مانده تقسیم $5a - 7b$ بر ۱۳ چند است؟

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم:

باتوجه به قضیه‌ی تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌مانده‌ی تقسیم یعنی r در رابطه‌ی $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم دراین‌صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r = 0$، یا باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا... یا باقی‌مانده‌ی تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a = 5k$ یا $a = 5k + 1$ یا $a = \cdots$ یا $a = 5k + 3$ یا $a = \cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

تمرین) اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k + 1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

تمرین) ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

تمرین) ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود. سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t + 1)$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده‌ی تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، با ۱ مساوی است.)

تمرین) فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a, b, c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه‌ی عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

تمرین) ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

تمرین) اگر $a > 1$ و $a|9k + 4$ و $a|5k + 3$، ثابت کنید a عددی اول است.

تمرین) اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $5|4k + 1$، ثابت کنید: $25|16k^2 + 28k + 6$

تمرین) آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a + c|b + d$؟

تمرین) ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

(راهنمایی: فرض کنید $(m, m + 1) = d$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

تمرین) اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$.

تمرین) اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

تمرین) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

تمرین) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ دراین صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

تمرین) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$.

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$).

تمرین) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

تمرین) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

تمرین) ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

تمرین) ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

تمرین) حاصل هریک را بدست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $([m^2, m], m^5)$

ب) $(2m, 6m^3)$

پ) $(3m+1, 3m+2)$

ت) $[m^7, (m^2, m^3)]$

ث) $[(72, 48), 120]$

درس ۳ – هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

هم‌نهشتی:

(مجموعه‌ی اعدادی را که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$

$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$

$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$

$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k + 3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$

می‌دانیم مجموعه‌های A_0، A_1، A_2 و A_3 یک افراز برای مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هردو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه واقع‌اند (A_0، A_1، A_2 و A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی‌مانده‌ی تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد یا اصطلاحاً a و b و بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $4|a-b$ و اگر این‌طور نباشد $4\nmid a-b$.

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b اگر $m|a-b$ می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به سنج یا پیمانه‌ی m»؛ و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$. تعریف رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m به زبان ریاضی عبارت است از:

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b \ (m \in \mathbb{N})$

قرارداد: مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیح که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} | x = mk + r\}$ را کلاس یا دسته‌ی هم‌نهشتی r به پیمانه‌ی m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

مثال:
$$\begin{cases} 12 \overset{5}{\equiv} 2, -11 \overset{6}{\equiv} 1 \\ -295 \overset{10}{\equiv} -5, 23 \overset{3}{\equiv} -7 \end{cases}$$

تمرین) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

۱) $1399 \overset{9}{\equiv}$

۲) $947 \overset{3}{\equiv}$

۳) $419 \overset{11}{\equiv}$

تمرین) مشخص کنید کدام عدد زیر در بخش‌پذیری بر ۷ با ۱۱۲۳ هم‌نهشت است؟

۳۷   ۳۸   ۳۹   ۴۰

تمرین) بهازای چند m رابطه‌ی $533 \overset{m}{\equiv} 312$ برقرار است؟

ویژگی۱: به دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + c \overset{m}{\equiv} b + c \\ a - c \overset{m}{\equiv} b - c \end{cases}$$

تمرین) ویژگی۱ را اثبات کنید و با چند مثال عددی درستی آنرا بررسی کنید.

ویژگی۲: دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

تمرین) ویژگی ۲ را اثبات کنید و چند مثال عددی برای آن بزنید.

ویژگی۳: (دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توان به توان رساند.)

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

تمرین) ویژگی ۳ را اثبات کنید و چند مثال عددی برای آن بزنید.

تمرین) اگر باقی‌مانده x بر ۱۶ برابر ۱۳ باشد حاصل $\left(x^3 \overset{16}{\equiv} ?\right)$ چند است؟

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه‌ی هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b\,,\, c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} db & (۱) \\ a+c \overset{m}{\equiv} d+b & (۲) \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d & (۳) \end{cases}$$

تمرین) ویژگی ۴ را اثبات کنید و چند مثال عددی برای آن بزنید.

تذکر مهم: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر m مساوی با r باشد دراین‌صورت $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

تمرین) ثابت کنید اگر $a = mq + r$ آنگاه $a \overset{m}{\equiv} r$:

تمرین) اگر $۸۸ \overset{۱۹}{\equiv} a$ آنگاه کدام گزینه نمایش درستی از a است؟

$a = ۱۹k + ۷$ $\quad$ $a = ۱۹k + ۸$ $\quad$ $a = ۱۹k + ۱۱$ $\quad$ $a = ۱۹k + ۱۲$

تمرین) اگر $x = ۱۳m - ۴۱$ آنگاه کدام یک نمایش درستی از x است؟

$x \overset{۱۳}{\equiv} ۲$ $\quad$ $x \overset{۱۳}{\equiv} ۷$ $\quad$ $x \overset{۱۳}{\equiv} ۹$ $\quad$ $x \overset{۱۳}{\equiv} ۱۱$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانه‌ی m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

نتیجه ۲: اگر دو عدد ف تقسیم بر عدد طبیعی هم باقی‌مانده باشند دراین‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

تمرین) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A = (۲۷)^{۷} + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

تمرین) حاصل باقی‌مانده‌ی تقسیم $۵۶^{۳۱} \times ۲۱^{۷}$ بر ۱۹ چند است؟

تمرین) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰$ را بر ۷ بیابید.

تمرین) حاصل باقی‌مانده تقسیم $(۱۰۰۰^{۲۳} + ۱۵) \times ۱۷$ بر ۱۳ چند است؟

ویژگی ۵: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطه‌ی هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۶: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه‌ی آن هم‌نهشتی را بر ب‌م‌م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\,,\ (c, m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نتیجه مهم: اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c, m) = ۱$ دراین‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعده‌ی حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است. مثال: واضح است که $۳ \times ۴ \overset{۳}{\equiv} ۶ \times ۴$ و چون پس $(۴,۳) = ۱$ پس $۳ \overset{۳}{\equiv} ۶$.

بسط دهگانی:

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_2a_1a_0}$ را بسط می دهیم و درهم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی میکنیم.

$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots+10^2a_2+10a_1+10^0a_0$

$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\cdots+1\times a_1+a_0$

$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}\ldots$

تمرین) هریک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$1388109=1\times 10^6+\ldots$

$13571122=$

تمرین) باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A=1358112$ را بر عدد ۹ بیابید.

تمرین) با توجه به اینکه $1\overset{3}{\equiv}10$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k\in\mathbb{N},10^k\overset{3}{\equiv}1$ بنابراین، ، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

تمرین) می‌دانیم $10\overset{11}{\equiv}-1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n\overset{11}{\equiv}1$ و برای هر n فرد، $10^n\overset{11}{\equiv}-1$ حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به جای توان های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به جای توان های فرد عدد ۱۰، عدد (-1) قرار دهیم باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

نکته: اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ به جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانه‌ی ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + 10^{n-2} \times a_{n-2} + \cdots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{2}{\equiv} 0 \times a_{n-1} + \cdots + \cdots + \cdots \times a_2 + \cdots + a_0$$

$$A \overset{10}{\equiv} a_0 \text{ و } A \overset{5}{\equiv} \dots \text{ و} \Rightarrow A \overset{2}{\equiv} \dots$$

یعنی قانون بخش‌پذیری بر ۲ و ۵ و ۱۰ مشابه هم است.

تقویم‌نگاری: اگر امروز سه شنبه باشد ۷ روز بعد هم سه شنبه است. همین الگو را برای بحث تقویم‌نگاری استفاده می‌کنیم. یعنی فاصله‌ی دو روز را پیدا می‌کنیم و سپس باقی‌مانده آن به پیمانه‌ی ۷ را به‌دست می‌آوریم و به تعداد عدد به‌دست آمده جلو می‌رویم تا جواب به‌دست آید. مثلاً اگر امروز سه شنبه ۱۰ آبان باشد ۱۲ اسفند چند شنبه است؟

حل :

$$\overset{\text{اسفند}}{12} + \overset{\text{بهمن}}{30} + \overset{\text{دی}}{30} + \overset{\text{آذر}}{30} + \overset{\text{آبان}}{20} \overset{7}{\equiv} 3$$

س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳

پس ۱۲ اسفند جمعه است.

تمرین) فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی ماه چند شنبه است؟

تمرین) اگر ۲۸ مرداد سالی جمعه باشد، ۱۳ آبان همان سال چند شنبه است؟

تمرین) اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

تمرین) از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادله‌ی هم‌نهشتی

تعریف: یک رابطه‌ی هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله‌ی هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادله‌ی هم‌نهشتی پیدا کردن همه‌ی جواب‌هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_0 \overset{m}{\equiv} b$. $(a, b \in \mathbb{Z})$

قضیه: معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m)|b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ چون برای هر b، همواره $1|b$ پس معادله‌ی $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

تمرین) جواب عمومی معادله $4 \overset{7}{\equiv} 5x$ را بدست آورید؟

تمرین) جواب‌های عمومی معادله‌ی $17 \overset{5}{\equiv} 4x$ را بدست آورید.

تمرین) همه‌ی اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

تمرین) اگر $2 \overset{17}{\equiv} 7x$ حاصل $\overset{17}{\equiv} x$ چند است:

تمرین) معادله‌ی $11 \overset{9}{\equiv} 6x$ و معادله‌ی $18 \overset{6}{\equiv} 4x$

تمرین) بزرگ‌ترین عدد صحیح دو رقمی را پیدا کنید که ۳۱ برابر آن در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده ۲ دهد.

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن:

تعریف: هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله‌ی $ax + by = c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c \in \mathbb{Z}$ و b و a دراین‌صورت معادله‌ی مذکور $(ax + by = c)$ را یک معادله‌ی سیّاله درجه‌ی اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یك معادله‌ی سیّاله به معادله‌ی هم‌نهشتی :

معادله‌ی سیّاله‌ی $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادله‌ی هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b|ax - c \Rightarrow b|ax - c$$

$\Rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c \ (b > 0)$ و $ax \overset{-b}{\equiv} c \ (b < 0)$ یا $ax \overset{|b|}{\equiv} c$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

$by \overset{-a}{\equiv} c$ و $by \overset{a}{\equiv} c$

تذکر: با توجه به قضیه‌ی قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله‌ی سیّاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a, b)|c$».

تمرین) معادله $11x + 13y = 27$ مفروض است. جواب عمومی x و y به‌دست آورید.

تمرین) کدام معادله‌ی زیر جواب ندارد. چرا؟

$9x + 21y = 36$ $\quad$ $6x + 20y = 13$ $\quad$ $3x + 5y = 12$

تمرین) می‌خواهیم یک کیسه ۴۹ کیلویی را با دو وزنه ۳ و ۴ کیلوگرمی وزن کنیم، می‌توانیم از یک و یا هر دو وزنه استفاده کنیم، به چند طریق این عمل ممکن است؟

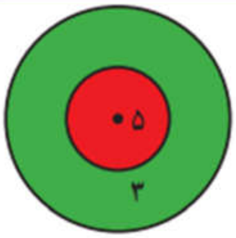
تمرین) با تبدیل معادله سیاله ی $۴x + ۵y = ۹$ به معادله‌ی هم‌نهشتی وحل آن، جواب‌های عمومی این معادله‌ی سیاله‌را بیابید.

تمرین) دریک ساندویچی، قیمت ساندویچ فلافل ۱۷۰۰۰ و قیمت ساندویچ کالباس ۱۵۰۰۰ است. ۸۶۰ هزار تومان داریم، حداکثر چند تا ساندویچ می‌توان خرید به شرطی که همه‌ی پول را مصرف کنیم.

تمرین) چند عدد دو رقمی در مجموعه جواب $۳۳x + ۵۱y = ۷۰$ صدق می‌کنند.

تمرین) به‌چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

تمرین) دریک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به‌چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)



تمرین) تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره‌ی هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره‌ی با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره‌ی بزرگ‌تر و خارج دایره‌ی کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه‌ی تیرها به داخل دایره‌ی بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

تمرین) عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۹ تعلق دارد؟

تمرین) اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است
(به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

$k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

تمرین) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

تمرین) فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

تمرین) ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

تمرین) عکس تمرین بالا را بیان و اثبات کنید.

تمرین) با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

تمرین) با توجه به تمرین بالا ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

تمرین) باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

تمرین) اگر دو عدد $(۵-۳a)$ و $(۷-۴a)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a+۶)$ را بدست آورید.

تمرین) باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ بدست آورید (رقم یکان A را بیابید)

تمرین) جواب‌های عمومی معادله‌ی سیّاله $۷x + ۵y = ۱۱$ خطی را بدست آورید.

تمرین) به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

تمرین) معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را بدست آورید.

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

ج) $۱۵x \overset{۲}{\equiv} ۱۱$

تمرین) اگر اوّل مهر ماه، در یک سال روز یکشنبه باشد، ۱۷ اسفند ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

تمرین) اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

تمرین) همه‌ی اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

تمرین) به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

تمرین) به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

تمرین) شخصی در یک مسابقه‌ی علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را بدست آورید؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)