توابع چند جمله ای (۰/۲۵ نمره)

مطابق با صفحه ۲ کتاب درسی

درسنامه

❖ فرم کلی این تابع:

توان همگی عدد حسابی

$$f(x)=ax^{n}+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$$

ضرایب همگی اعداد حقیقی

❖ **درجهٔ یک چند جمله ای:**

به بزرگ ترین توان چند جمله ای درجهٔ آن تابع می‌گویند.

❖ **دامنهٔ چند جمله ای:**

دامنهٔ آن‌ها، مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است.

مثال آموزشی

درجهٔ چند جمله ای زیر چند است؟

درجهٔ ۴ است

$$f(x)=2x^{3}+x^{4}-\frac{1}{3}x$$

درجهٔ صفر است.

$$f(x)=3$$

درجهٔ یک است.

$$f(x)=2x-5$$

درجهٔ ۳ است.

$$f(x)=(x-1)(x^{2}+3)$$

یک گام فراتر از کتاب:

$$f(x)=(x^{2}-3x)(x^{3}-\frac{1}{2}x)+x^{4}+3$$

درجهٔ ۵ است.

در نهایی چه خبره؟

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تشخیص دهید

۱- تابع $y=\sqrt{2}x^{3}-\frac{3}{4}x$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است. (دی ۱۴۰۰) درست ☐ نادرست ☐

۲- تابع $y=\sqrt{2x}-x^{2}$ یک تابع درجهٔ دوم است. (فرداد ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

۳- تابع $y=\sqrt{3}x^{3}-\pi x+1$ یک تابع چند جمله ای است. (شهریور ۱۴۰۲) درست ☐ نادرست ☐

۴- تابع $y=2x(1-3x^{2})+1$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. (دی ۱۴۰۱) درست ☐ نادرست ☐

پاسخنامه

۱. درست.

بزرگ‌ترین درجه چندجمله‌ای ۳ است.

۲. درست.

بزرگ‌ترین درجه تابع ۲ است.

۳. درست.

با توجه به تعریف تابع چندجمله‌ای، توان‌های x عددی صحیح است.

۴. درست.

تابع به‌صورت $y=2x-6x^{3}+1$ است و بزرگ‌ترین درجه ۳ است.

توابع درجه سوم (۰/۵ نمره)

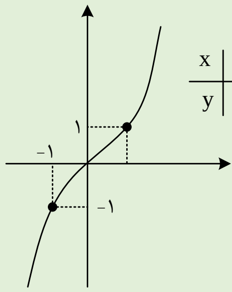
مطابق با صفحه ۳ تا ۵ کتاب درسی

درسنامـــــــــــــــــه

❖ **فرم کلی این تابع:** در کتاب مدل های زیر بررسی می شود.

$f(x)=x^۳ , f(x)=\pm(x+a)^۳+b$

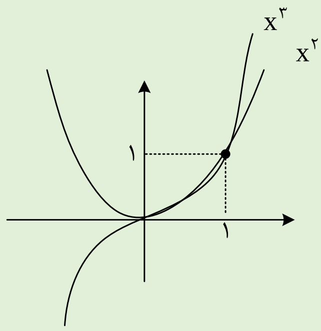
❖ **رسم با نقطه یابی:**



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

❖ **دامنه و برد تابع درجه سه:** دامنه $\mathbb{R}$ و برد $\mathbb{R}$

❖ **مقایسه با** $x^۲$:



در $x=۱$ با هم برخورد دارند.

و در $x>۱$ نمودار $x^۳$ بالاتر است.

و در $x<۱$ نمودار $x^۲$ بالاتر است.

❖ **رسم با انتقال:**

برای رسم $f(x)=\pm(x-a)^۳+b$ به ترتیب زیر عمل کنید.

۱- رسم $x^۳$

۲- رسم $(x-a)^۳$: انتقال $x^۳$ به اندازه $+a$ روی محور x

۳- قرینه کردن نسبت به محور x در صورت منفی پشت پرانتز

۴- انتقال قائم روی محور y ها به اندازه b

❖ **صعودی یا نزولی بودن تابع:**

صعود اکید

$f(x)=\pm(x-a)^۳+b$

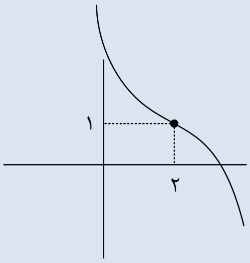
نزول اکید

❖ **وارون تابع:** وارون تابع $y=x^۳$ تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ است.

مثال آموزشـــــــــــــی

مثال۱: نمودار $y=-(x-۲)^۳+۱$ را رسم کنید.

پاسخ:



مراحل زیر را طی می کنیم.

$x^۳ \xrightarrow[\text{۲ واحد راست}]{} (x-۲)^۳ \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور xها}]{} -(x-۲)^۳ \xrightarrow[\text{یک واحد انتقال به بالا}]{} -(x-۲)^۳+۱$

در نـــــــهایـــــــی چـــــــه خبره؟

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید و درستی و نادرستی عبارات را مشخص کنید.

۱- تابع $y=-x^۳+۲$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است *(شهریور ۹۸)* **درست ☐ نادرست ☐**

۲- تابع $y=(x+۱)^۳$ در دامنهٔ تعریف خود است .... *(خرداد۹۸)* **(صعودی – نزولی)**

۳- تابع $y=-x^۳+۲$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است *(شهریور ۹۸)* **درست ☐ نادرست ☐**

۴- نمودار تابع $y=x^۳$ در بازهٔ $(۰,۱)$ .... از نمودار تابع $g(x)=x^۲$ قرار دارد. *(دی ۱۴۰۰)* **(بالاتر – پایین تر)**

۵-ضابطه ی تابع وارون $y=x^۳$، برابر .... است. *(شهریور ۱۴۰۱)*

پـــاســــخـــنـــامـــه

۱. نادرست. ضریب $x^۳$ منفی است، پس تابع در دامنهٔ تعریفش نزولی است.

۲. صعودی.ضریب $(x+۱)^۳$ مثبت است، پس در دامنهٔ خود صعودی است.

۳. نادرست.ضریب $x^۳$ منفی است، پس تابع در دامنه تعریفش نزولی است.

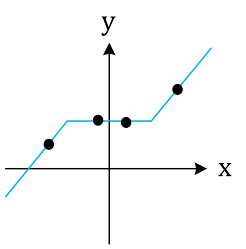
۴. پایین‌تر.در بازه $(۰,۱)$ تابع $x^۳$ پایین‌تر از $x^۲$ است.

۵. $y^{-1}=\sqrt[۳]{x}$ وارون تابع $y=x^۳$ تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ است.

توابع صعودی و نزولی (۰/۵ نمره)

مطابق با صفحه ٦ تا ۹ کتاب درسی

❖ **تابع صعودی: (نمودار پایین نیاید)**

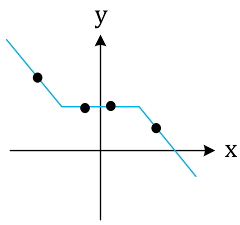


به زبان ریاضی:اگر برای هر دو نقطهٔ x_1, x_2 از مجموعه A $(A \subseteq D_f)$ با فرض $x_2 > x_1$ داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$، آنگاه f را در مجموعهٔ A تابعی صعودی می نامیم.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

❖ **تابع نزولی: (نمودار بالا نرود)**

به زبان ریاضی :اگر برای هر دو نقطهٔ x_1, x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ با فرض $x_2 > x_1$ داشته باشیم $f(x_1) \ge f(x_2)$، آنگاه f را در مجموعهٔ A تابعی نزولی می‌نامیم.



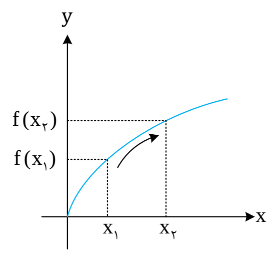
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

❖ **تابع یکنوا**

اگر توابعی در یک بازه، فقط صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا است.

نکته: تابع ثابت $(k \in \mathbb{R}, f(x) = k)$ در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

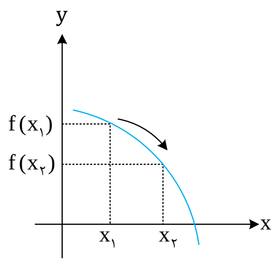
❖ **تابع اکیداً صعودی**



اگر برای هر دو نقطهٔ x_1, x_2 از مجموعهٔA $(A \subseteq D_f)$ با فرض $x_2 > x_1$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را در مجموعهٔ A تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

❖ **تابع اکیداً نزولی**



اگر برای هر دو نقطهٔ x_1, x_2 از مجموعهٔA $(A \subseteq D_f)$ با فرض $x_2 > x_1$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را در مجموعهٔ A تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

❖ **تابع اکیداً یکنوا**

اگر تابعی در یک بازه، فقط اکیداً صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه اکیداً یکنوا است.

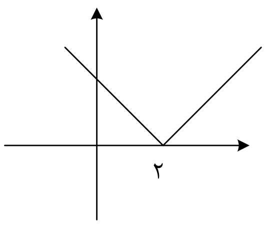
از پایه:

باید رسم توابع پایه های قبل را بلد باشید.پیوست اخر را نگاه کنید.

مثال آموزشـــــــــــــــــی

مثال) تابع $f(x) = |x-2|$ در چه بازه ای اکیداً صعودی است.

ابتدا نمودار تابع f را رسم می کنیم



مطابق نمودار در باز $(2, +\infty)$ *اکیداً صعودی است.*

در نـــــــهایـــــــی چـــــــه خبره؟

۱-درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید و در جاهای خالی کلمه ای بنویسید که عبارت درست باشد.

الف-تابع $f(x) = x^3$، تابعی اکیداً صعودی است. *(خرداد ۱۴۰۱)*

ب- هر تابع یکنوا، یک به یک است. *(دی ۱۴۰۱)*

پ- بی شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. *(خرداد ۱۴۰۲)*

ت- تابع $y = \frac{1}{x}$، در دامنه اش یکنواست. *(شهریور ۱۴۰۲)*

ث- برای آنکه $y = ax + b$ در دامنه اش هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار a باید برابر .... باشد *(خرداد۹۹)*

ج- تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود. *(نهایی دی ۹۷ و خرداد ۹۹)*

چ- تابع $y = (x+1)^3$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی – نزولی) است. *(نهایی خرداد ۹۸)*

ح- تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. *(نهایی شهریور ۹۸)*

خ- توابع اکیداً یکنوا همواره .... هستند. *(نهایی شهریور۹۸)*

د- تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه اش اکیداً نزولی است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

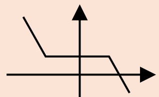
۲- نمودار تابع $y = x + |x|$ را رسم کنید و مشخص کنید، در چه بازه هایی تابع صعودی یا نزولی ثابت است. (خارج از کشور) *(خرداد ۱۴۰۱)*

پاســـــخـــنـــامـــه

۱. الف) درست.

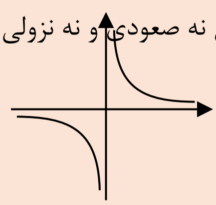
تابع $f(x)=x^3$ همواره اکیداً صعودی است.

ب) نادرست.ممکن است مانند شکل مقابل یک‌به‌یک نباشد، تابع اکیداً یکنوا یک‌به‌یک است.



پ) درست.تمامی توابع به‌فرم $(k\in\mathbb{R}, f(x)=k)$ هم صعودی و هم نزولی هستند.

ت) نادرست.تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.



ث) $a=0$.توابع ثابت $y=k$ هم صعودی و هم نزولی هستند.

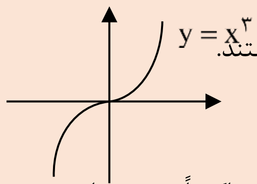
ج) درست.توابع ثابت به‌فرم $(k\in\mathbb{R}, y=k)$ هم صعودی و هم نزولی هستند.

چ) صعودی.ضریب $(x+1)^3$ مثبت است پس در دامنهٔ خود صعودی است.

ح) نادرست.ضریب x^3 منفی است پس در دامنهٔ تعریفش نزولی است.

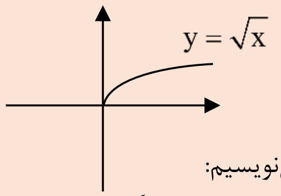
خ) یک‌به‌یک.

توابع اکیداً یکنوا همواره یک‌به‌یک هستند.



د) نادرست.

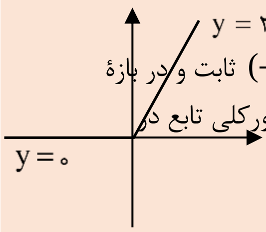
با توجه به نمودار تابع، تابع در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.



۲. ابتدا تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=x+|x| \Rightarrow \begin{cases} x+x=2x & x\ge 0 \\ x+(-x)=0 & x<0 \end{cases}$$

در بازه‌های تعیین‌شده تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع، در بازه $(-\infty,0]$ ثابت و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است و به‌طورکلی تابع در $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

مقدار و ضابطه تابع مرکب (۰/۵ نمره)

مطابق با صفحه ۱۱ و ۱۲ کتاب درسی

درسنامـــــــــــــه

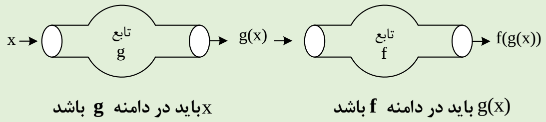
❖ **تابع مرکب:**

اگر f و g دوتابع باشند طوری که اشتراک برد g و دامنهٔ f، غیر تهی باشد $(R_g \cap D_f \neq \varnothing)$، در این صورت تابع $f(g(x))$ را با نماد $(fog)(x)$ (میخوانیم اف اُ جی) نمایش می دهند و آن تابع مرکب می‌نامند.

❖ **مراحل ساخت تابع fog**

مرحله اول: x ورودی و $g(x)$ خروجی است.

مرحله دوم: $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



توجه: هر تابعی را می‌توان از ترکیب دو تابع دیگر به‌دست آورد.

مثلاً در $h(x)=\sqrt[3]{x+1}$ می توان $g(x)=x+1, f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نظر گرفت $h(x)=fog(x)$

مثال آموزشـــــــــــی

مثال۱) اگر $g(x)=x^2-3, f(x)=\sqrt{2x+5}$ **باشد مقدار** $g(f(2))$ **را محاسبه کنید.**

از داخلی‌ترین قسمت شروع می‌کنیم

$f(2)=\sqrt{2(2)+5}=3$

$g(f(2))=g(3)=3^2-3=6$

مثال۲) اگر $f=\{(1,4),(5,7)\}$ و $g=\{(4,3),(7,2),(0,5)\}$ باشد، fog و gof را تشکیل دهید.

$fog=\{(0,7)\}, gof=\{(1,3),(5,2)\}$

در نــــــهایـــــــــی چــــــــه خبره؟

۱- تابع $h(x)=(2x^2-5x+1)^3$ **به صورت ترکیب دو تابع** $f(x)=2x^2-5x+1$ **و** $g(x)=$............... **است.** (دی ۱۳۹۷)

۲- اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

ورودی $x \rightarrow 2x-2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} \rightarrow$ خروجی

۳- اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$ تابع **gof** را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

۴- اگر $f(x)=۷-۴x^۲$, $g(x)=\sqrt{x+۳}$ باشد $fog(۱)$ را محاسبه کنید. (دی ۱۴۰۱)

۵- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$, $g(x)=x-۱$، آنگاه ضابطه تابع **fog** را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

۶- اگر $f(g(x))=۴x^۲+۱$, $f(x)=\frac{x}{۲}-۱$، آنگاه ضابطه تابع **g(x)** را بیابید (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخنامه

۱. $g(x)=x^۳$.

ترکیب تابع به‌صورت مقابل است:

$$h(x)=gof(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۳$$

۲. $\frac{۴}{۳}$.

با توجه به توابع خروجی به‌صورت مقابل است:

$$۳\longrightarrow\underbrace{۲(۳)-۲}_{۴}\longrightarrow\frac{۴}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۴}{۳}$$

۳. $gof=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,۷)\}$

مراحل ساخت تابع gof:

به ازای هر x از دامنهٔ f اگر $f(x)$ در دامنه g موجود بود، اعضای gof به‌صورت $(x,g(f(x)))$ می‌باشد.

$$f(۰)=-۱\in D_g\longrightarrow g(-۱)=۴$$

$$f(۵)=۹\in D_g\longrightarrow g(۹)=۰$$

$$f(۳)=۷\in D_g\longrightarrow g(۷)=۷$$

$$f(-۲)=۴\notin D_g$$

۴. از داخلی‌ترین قسمت شروع می‌کنیم:

$$fog(۱)=f(g(۱))$$
$$g(۱)=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲$$
$$f(g(۱))=f(۲)=۷-۴(۲)^۲=\boxed{-۹}$$

۵. برای ساخت تابع fog به‌کمک ضوابط آن‌ها می‌توان به‌جای ورودی‌های تابع f تابع g را جایگذاری نمود:

$$f(g(x))=f(x-۱)=\sqrt{(x-۱)+۱}=\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow fog(x)=\sqrt{x}$$

۶. در تابع $f(g(x))$ تابع $g(x)$ به‌عنوان ورودی برای تابع f است. پس:

$$f(g(x))=\frac{g(x)}{۲}-۱$$

حال عبارت بالا را با $f(g(x))=۴x^۲+۱$ برابر قرار داده و تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{g(x)}{۲}-۱=۴x^۲+۱\Rightarrow\frac{g(x)}{۲}=۴x^۲+۲$$

$$\Rightarrow g(x)=۸x^۲+۴$$

دامنه تابع مرکب (۰/۷۵ نمره)

مطابق با صفحه ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی

درسنامه

❖ **دامنه تابع مرکب:**

دامنهٔ تابع مرکب fog مجموعهٔ xهایی است که همزمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

۲- $g(x)$ در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

دامنهٔ fog را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

برای سایر توابع داریم:

دامنهٔ تابع	ضابطهٔ تابع	تابع مرکب
$D_{gog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_g\}$	$g(g(x))$	$(gog)(x)$
$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$	$g(f(x))$	$(gof)(x)$
$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$	$f(f(x))$	$(fof)(x)$

از پایه:

حل نامعادلات و تعیین علامت جز موارد مورد نیاز این درس از پایه است.

مثال آموزشی

اگر $g(x)=\sqrt{x-7}, f(x)=2x-3$ ، دامنهٔ تابع gof را به دست آورید.

برای محاسبه D_{gof} مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- دامنه‌های f و g را به دست می‌آوریم.

۲- با توجه به $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ ، ضابطهٔ $f(x)$ را در محدود دامنهٔ g قرار می‌دهیم و نامعادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم.

۳- نتیجهٔ ۲ را با دامنهٔ f اشتراک می‌گیریم. بنابراین:

مرحله اول: $D_f=\mathbb{R}, x-7\geq 0 \Rightarrow x\geq 7 \Rightarrow D_g=[7,+\infty)$

مرحله دوم: $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid 2x-3\in[7,+\infty)\}$

$$2x-3\geq 7 \Rightarrow 2x\geq 10 \Rightarrow x\geq \frac{10}{2}$$

مرحله سوم: $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 5\}=[5,+\infty)$

در نهایی چه خبره؟

۱- اگر $g(x)=\sqrt{x-1}, f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ باشد، دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۲- اگر $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ ، $f(x)=\sqrt{x-4}$ باشد دامنه gof را به‌دست آورید. (خرداد ۹۸)

۳- اگر $g(x)=\sqrt{x+3}, f(x)=7-4x^2$ باشد آنگاه دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید (دی ۱۴۰۱)

۴- اگر $g(x)=x-1, f(x)=\sqrt{x+1}$ ، آنگاه دامنه‌ی تابع fog را بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۵- توابع $g(x)=3x-1, f(x)=\dfrac{x+3}{2x}$ را در نظر بگیرید دامنهٔ fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. (دی ۱۳۹۷)

پاسخنامه

۱. ابتدا دامنه تابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$D_f=\mathbb{R}-\{3\}$,

$x-1\geq 0 \longrightarrow x\geq 1 \longrightarrow D_g=[1,+\infty)$

دامنه تابع fog به‌صورت زیر است:

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}$$

حال ضابطه g را در محدود دامنهٔ f قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$D_{fog}=\left\{x\in[1,+\infty) \mid \sqrt{x-1}\in\mathbb{R}-\{3\}\right\}$$

$$\sqrt{x-1}\neq 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-1\neq 9 \longrightarrow x\neq 10$$

و در پایان بین $x\neq 10$ و $x\in[1,+\infty)$ اشتراک می‌گیریم:

$$D_{fog}\Rightarrow x\in[1,10)\cup(10,+\infty)$$

۲. ابتدا دامنه تابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$x^2-1\neq 0 \longrightarrow x^2\neq 1 \longrightarrow x\neq \pm 1$

$D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$x-4\geq 0 \longrightarrow x\geq 4$

$D_f=[4,+\infty)$

دامنه تابع gof به‌صورت زیر است:

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\right\}$$

حال ضابطه f را در محدود دامنهٔ g قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$D_{gof}=\left\{x\in[4,+\infty) \mid \sqrt{x-4}\in\mathbb{R}-\{-1,1\}\right\}$$

$$\sqrt{x-4}\neq \pm 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-4\neq 1 \longrightarrow x\neq 5$$

در پایان بین $x\neq 5$ و $x\in[4,+\infty)$ اشتراک می‌گیریم:

$D_{gof} = [۴,۵)\cup(۵,+\infty)$

۳. ابتدا دامنه تابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$D_f = \mathbb{R}$,

$x+۳ \ge ۰ \longrightarrow x \ge -۳ \longrightarrow D_g = [-۳,+\infty)$

دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر است:

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$D_{fog} = \{x \in [-۳,+\infty) \mid \sqrt{x+۳} \in \mathbb{R}\}$

عبارت $\sqrt{x+۳} \in \mathbb{R}$ همواره برقرار است، پس اشتراک آن با $x \in [-۳,+\infty)$ به این شکل است:

$D_{fog} = [-۳,+\infty)$

۴. ابتدا دامنه تابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$D_g = \mathbb{R}$,

$x+۱ \ge ۰ \longrightarrow x \ge -۱ \longrightarrow D_f = [-۱,+\infty)$

دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر است:

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

حال ضابطه g را در محدوده دامنهٔ f قرار می‌دهیم و نامعادله حاصل را حل می‌کنیم:

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-۱) \in [-۱,+\infty)\}$

$x-۱ \ge -۱ \longrightarrow x \ge ۰$

بنابراین پس از اشتراک بین $x \ge ۰$ و دامنهٔ g، دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر می‌باشد:

$D_{fog} = [۰,+\infty)$

۵. ابتدا دامنه تابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$۲x \ne ۰ \longrightarrow x \ne ۰ \longrightarrow D_f = \mathbb{R}-\{۰\}$

$D_g = \mathbb{R}$

دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر است:

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

حال ضابطه g را در محدوده دامنهٔ f قرار می‌دهیم و نامعادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم:

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid (۳x-۱) \in \mathbb{R}-\{۰\}\}$

$۳x-۱ \ne ۰ \longrightarrow ۳x \ne ۱ \longrightarrow x \ne \frac{۱}{۳}$

و در پایان از اشتراک $x \ne \frac{۱}{۳}$ و دامنه g داریم:

$D_{fog} \Rightarrow x \in (-\infty,\frac{۱}{۳})\cup(\frac{۱}{۳},+\infty)$

انتقال توابع (۰/۷۵ نمره)

مطابق با صفحه ۱۵ تا ۲۱ کتاب درسی

درسنامه

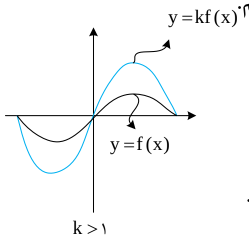
❖ **رسم نمودار $y=kf(x)$ به کمک نمودار $y=f(x)$:**

برای رسم نمودار $y=kf(x)$ کافی است عرض همهٔ نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

انبساط و انقباض $y=kf(x)$:

۱- انبساط عمودی

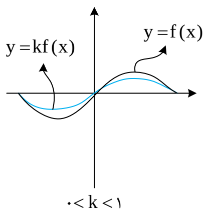
اگر $k>۱$، آن‌گاه نمودار در امتداد محورyها با ضریب k کشیده می‌شود.



انبساط عمودی

۲- انقباض عمودی

اگر $۰<k<۱$، آن‌گاه نمودار در امتداد محور yها با ضریب k جمع می‌شود.



انقباض عمودی

❖ **رسم نمودار $y=f(kx)$ به کمک نمودار $y=f(x)$:**

برای رسم نمودار $f(kx)$ کافی است طول همهٔ نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را بر k تقسیم کنیم.

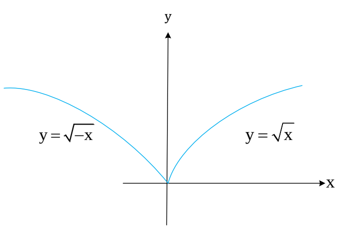
انبساط و انقباض $y=f(kx)$:

۱- **انبساط افقی:** اگر $۰<k<۱$، آن‌گاه منحنی با ضریب $\frac{۱}{k}$ در راستای محورxها باز تر می‌شود

۲- **انقباض افقی:** اگر $k>۱$، آن‌گاه منحنی با ضریب $\frac{۱}{k}$ در راستای محورxها جمع‌تر می‌شود.

❖ **رسم نمودار $y=f(-x)$**

برای رسم نمودار $y=f(-x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محورyها قرینه کنیم.



❖ **رسم نمودار $|f(x)|$:**

برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و قسمت هایی که نمودار f زیر محور xهاست، نسبت به محورxها قرینه کنیم.

ازپایه:

یادآوری: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار توابع جدید با فرض $k>0$ به صورتی که بیان شده است، عمل می‌کنیم:

۱- $y=f(x+k)$: منحنی k واحد به سمت چپ منتقل می‌شود.

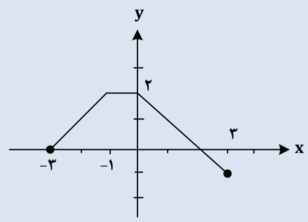
۲- $y=f(x-k)$: منحنی k واحد به سمت راست منتقل می‌شود.

۳- $y=f(x)+k$: منحنی k واحد به سمت بالا منتقل می‌شود.

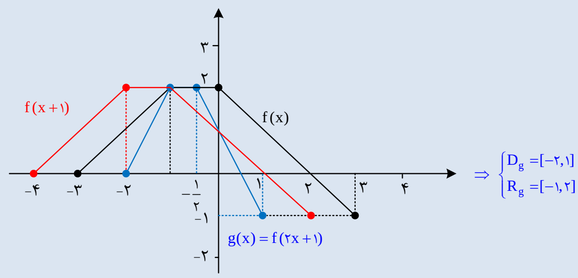
۴- $y=f(x)-k$: منحنی k واحد به سمت پایین منتقل می‌شود.

مثال آموزشـــــــــــــــــی

با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ را رسم کنید، و دامنه برد آن را معلوم کنید.



در عرض نمودار تغییر نداریم اما طول‌ها یک واحد به چپ و سپس $\frac{1}{2}$ برابر می‌شوند.



در نــــــهایـــــــــی چــــــــه خبره؟

۱- در جای خالی عبارت مناسب قراردهید: *(خرداد ۱۴۰۲)*

نقطه ی $(-2,4)$ روی نمودار $y=f(x)$ می باشد. نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(2x)$ برابر .... است.

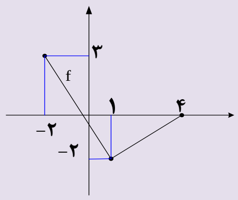
۲- برد تابع f بازه $(-3,1]$ است. برد تابع $y=-2f(3x-1)+3$، کدام یک از موارد زیر است؟ *(خرداد ۱۴۰۱)*

الف) $(-8,0]$ **ب)** $(-12,0]$ **ج)** $[1,9)$ **د)** $[-10,2]$

۳- نمودار تابع f به‌صورت روبرو است. *(شهریور۱۴۰۱)*

الف) نمودار تابع $g(x)=2f(x-1)$ را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع g را به دست آورید.



۴- اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر $[-1,3]$ و برد آن $(0,2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f(\frac{x}{2})$ را بیابید. *(دی ۱۴۰۱)*

۵- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دوبرابر می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع جدید را بنویسید. *(شهریور ۱۴۰۲)*

پـــاســــخــنـــامــه

۱. $(-1,4)$

در تابع $f(2x)$ عرض نقاط تغییری نمی‌کند، اما طول نقاط $f(x)$ نصف می‌شود، پس نقطهٔ متناظر با $f(-2)=4$ در تابع $f(2x)$، $(-1,4)$ می‌باشد.

۲. ج.

برد تابع f، $(-3,1]$ است یعنی: $-3<f(x)\le 1$

با توجه به این‌که می‌دانیم تغییرات طول نقاط تأثیری بر برد تابع ندارد، داریم:

$-3<f(3x-1)\le 1$

حال تغییرات عمودی تابع را اعمال می‌کنیم:

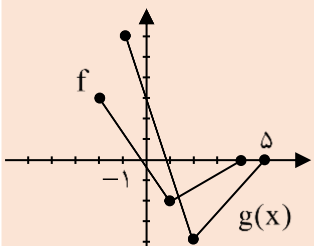
$-3<f(3x-1)\le 1$

$\xrightarrow{\times(-2)} 6>-2f(3x-1)\ge -2$

$\xrightarrow{+3} 9>-2f(3x-1)+3\ge 1$

بنابراین برد آن $[1,9)$ می‌باشد.

۳. الف) برای رسم نمودار تابع $2f(x-1)$، کافی است ابتدا تابع f را یک واحد به‌سمت راست انتقال دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر کنیم:



ب) با توجه به نمودار تابع دامنه آن $[-1,5]$ است.

۴. می‌دانیم که تغییرات x تأثیری بر برد ندارد، در نتیجه برد تابع $y=f(\frac{x}{2})$ با برد تابع $y=f(x)$ برابر است و طول نقاط آن نسبت به تابع $y=f(x)$ دو برابر شده است (انبساط افقی)، پس دامنه آن برابر است با:

$D=(-2,6] \quad , \quad R=(0,2]$

۵. ابتدا نمودار $f(x)$ را سه واحد به راست منتقل می‌کنیم:

$f(x-3)=\sqrt{x-3}$

سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم:

$2f(x-3)=2\sqrt{x-3}$

ضابطهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$y=2\sqrt{x-3}$

وارون تابع (۰/۷۵ نمره)

مطابق با صفحه ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی

درسنامـــــــــــــــه

❖ **به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون**

اگر $y=f(x)$ تابعی یک‌به‌یک باشد، برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون f، در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x و x به y، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

❖ **محدود کردن دامنهٔ تابع**

اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد.

نکته: اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$f(f^{-1}(x))=x; x\in D_{f^{-1}}$

$f^{-1}(f(x))=x; x\in D_f$

نکته: اگر f و g تابع هایی وارون پذیر باشند، آن‌گاه

$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$

از پایه:

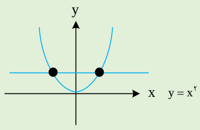
❖ **تابع یک به یک**

به تابعی که در زوج های مرتب متفاوت خود، مؤلفهٔ دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم

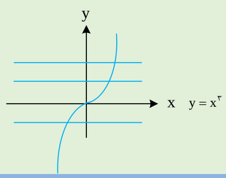
$f=\{(3,4),(2,\boxed{1}),(5,3),(9,\boxed{1})\}$ غیر یک به یک

❖ **بررسی یک به یک بودن تابع از روی نمودار تابع**

اگر هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه تابع یک به یک است. مثلاً تابع



یک به یک نیست، اما تابع



یک به یک است.

مثال آموزشـــــــــــــی

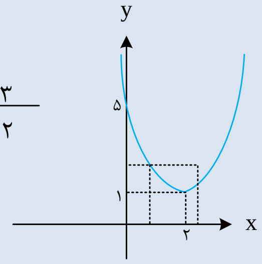
۱- ابتدا با محدود کردن دامنه $y=x^2-4x+5$ تابعی یک به یک بسازید، سپس وارون آن را به‌دست آورید.

$y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4)-4+5$

$\rightarrow y=(x-2)^2+1$

با توجه به رسم می‌توان دامنه را $[2,+\infty)$ در نظر گیریم.

x	۱	۲	۳
y	۲	۱	۲



$y=(x-2)^2+1 \Rightarrow y-1=(x-2)^2$

$\xrightarrow[x-2\geq 0]{D_g=[2,+\infty)} \sqrt{y-1}=x-2 \Rightarrow x=\sqrt{y-1}+2$

$\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$

۲- نشان دهید توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\dfrac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

نشان می‌دهیم که fog و gof هر دو برابر x اند.

$fog(x)=f(\dfrac{x+4}{3})=3(\dfrac{x+4}{3})-4=x$

$gof(x)=g(3x-4)=3(\dfrac{3x-4+4}{3})=x$

۳- اگر $f(x)=\dfrac{1}{8}x-3 \,,\, g(x)=x^3$ باشد، مقدار $g^{-1}of^{-1}(5)$ را بدست آورید.

$f^{-1}(x)=8(x+3)$

$\Rightarrow g^{-1}of^{-1}(5)=g^{-1}(64)=4$

$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

در نهایی چه خبره؟

۱- در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قراردهید.

الف)اگر $f=\{(2,3),(3,5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۱)

ب)ضابطه ی تابع وارون $y=x^3$، برابر .... است. (شهریور ۱۴۰۱)

پ)اگر $f(x)=2x^3-1$ باشند، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر .... است. (دی ۱۴۰۱)

ت)اگر $f(x)=3+\sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(fof^{-1})(5)$ برابر با .... است. (خرداد ۱۴۰۲)

۲- نشان دهید که $f(x)=-\dfrac{7}{2}x-3 \,,\, g(x)=-\dfrac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند (خارج از کشور خرداد ۱۴۰۱)

۳- اگر دامنه تابع $f(x)=x^2+4x+3$ برابر $[-2,+\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه ی تابع وارون را بدست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخنامه

۱. الف) ۲.

اگر $f(2)=3$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(3)=2$ است.

ب) $y=\sqrt[3]{x}$.

x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و در آخر x و y را جابه‌جا می‌کنیم:

$$y=x^3 \longrightarrow x=\sqrt[3]{y} \longrightarrow y=\sqrt[3]{x}$$

پ) ۲.

برای محاسبه $f^{-1}(15)$، $f(x)=15$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=15 \longrightarrow 2x^3-1=15 \longrightarrow 2x^3=16$$
$$\longrightarrow x^3=8 \longrightarrow \boxed{x=2}$$

ت) ۵.

از داخلی‌ترین شروع می‌کنیم و برای محاسبه $f^{-1}(5)$ حا $f(x)=5$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=5 \longrightarrow 3+\sqrt{2x-1}=5 \longrightarrow \sqrt{2x-1}=2$$
$$\longrightarrow 2x-1=4 \longrightarrow 2x=5 \longrightarrow x=\frac{5}{2}$$

حال $f(\frac{5}{2})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(\frac{5}{2})=3+\sqrt{2(\frac{5}{2})-1}=3+\sqrt{4}=\boxed{5}$$

۲. نشان می‌دهیم که fog و gof هر دو برابر x هستند:

$$fog(x)=f(g(x))=f(-\frac{2x+6}{7})=-\frac{7}{2}(-\frac{2x+6}{7})-3$$
$$=\frac{2x+6}{2}-3=\frac{2x}{2}=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(-\frac{7}{2}x-3)$$
$$=-\frac{2(-\frac{7}{2}x-3)+6}{7}=\frac{(-7x-6)+6}{7}=x$$

۳. تابع $f(x)=x^2+4x+3$، یک سهمی است و دامنهٔ آن، مجموعه اعداد حقیقی است. این تابع در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست و وارون‌پذیر نمی‌باشد اما در بازهٔ $[-2,+\infty)$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

$$y=x^2+4x+3 \longrightarrow y=(x^2+4x+4)-4+3$$
$$\longrightarrow y=(x+2)^2-1$$

رأس سهمی $(-۲,-۱)$ می‌باشد، پس:

$$R_f=[-۱,+\infty)$$

برای نوشتن ضابطه وارون ابتدا x را برحسب y حساب می‌کنیم، سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم:

$$y=(x+۲)^۲-۱$$

$$\longrightarrow y+۱=(x+۲)^۲ \longrightarrow \sqrt{y+۱}-۲=x$$

$$\longrightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲$$

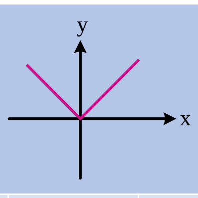
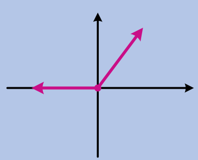
دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر برد f است:

$$D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty)$$

بانک سوالات امتحان نهایی

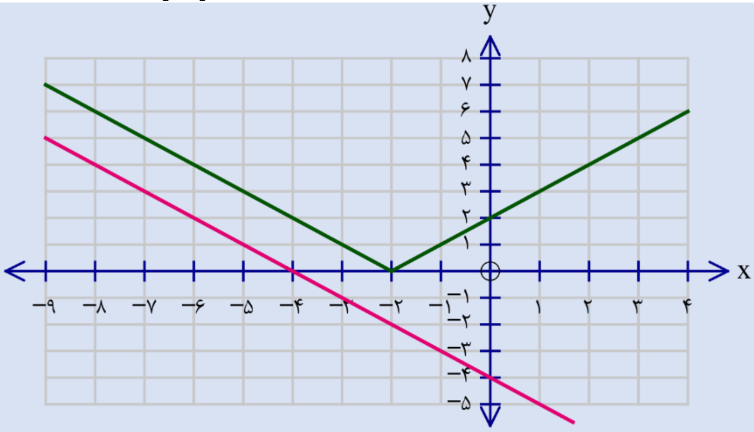
شماره	صورت سوال	تاریخ	درجه سختی	صفحه کتاب	احتمال تکرار
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. تابع $y=\sqrt{۳}x^{۳}-\pi x+۱$ ، یک تابع چند جمله ای است.	شهریور ۱۴۰۲			
پاسخ	درست . طبق تعریف تابع چند جمله ای، این تابع، یک تابع چند جمله ای است.				
۲	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y=۲x(۱-۳x^{۲})+۱$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. ب) نمودار تابع $y=x^{۲}$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ پایین تر از نمودار تابع $y=x^{۳}$ است.	دی ۱۴۰۱			
پاسخ	درست . زیرا $$y=۲x(۱-۳x^{۲})+۱=۲x-۶x^{۳}+۱$$ ب) نادرست . در این فاصله، نمودار تابع $y=x^{۲}$ بالاتر از نمودار تابع $y=x^{۳}$ است.				
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج از کشور) تابع $y=\sqrt{۲}\,x^{۳}-\frac{۳}{۴}x$ یک تابع چند جمله ای است.	خرداد ۱۴۰۱			
پاسخ	درست . مطابق تعریف، این تابع یک تابع چند جمله ای درجه ۳ است.				
۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=\sqrt{۲}\,x-x^{۲}$ یک تابع درجه‌ی دوم است.	خرداد ۱۴۰۱			
پاسخ	درست. بیشترین توان متغیر برابر ۲ است.				
۵	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ در بازه‌ی (۰،۱)، .... از نمودار تابع $g(x)=x^{۲}$ قرار دارد. (بالاتر – پایین تر)	دی ۱۴۰۰			
پاسخ	پایین تر				
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y=\sqrt{۲}x^{۳}-\frac{۳}{۴}x$ یک چندجمله ای از درجه ۳ است.	دی ۱۴۰۰			
پاسخ	درست .				
۷	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی توابع چندجمله ای برابر R است.	دی ۹۹			
پاسخ	درست				

۸	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. در بازه‌ی (۰،۱)، نمودار تابع $y = x^۳$ ، .... نمودار تابع $y = x^۲$ قرار دارد.	دی ۹۹			
پاسخ	*پایین*				
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = ۲x^۵ - ۴x^۳ + \sqrt{۷}x$ یک تابع چندجمله ای نیست.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	*نادرست*				
۱۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.	دی ۹۷			
پاسخ	*درست*				
۱۱	در جای خالی گزینه‌ی مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید. تابع $y = (x+۱)^۳$ در دامنه‌ی تعریف خود .... (صعودی ، نزولی) است.	خرداد ۹۸			
پاسخ	*صعودی*				
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه خود اکیداً یکنوا است.	تیر ۹۸			
پاسخ	*درست*				
۱۳	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. تابع $y = x^۲ \lvert x \rvert$ در بازه‌ی $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است.	تیر ۹۸			
پاسخ	*صفر*				
۱۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = -x^۳ + ۲$ در دامنه‌ی تعریفش صعودی است.	شهریور ۹۸			
پاسخ	*نادرست*				
۱۵	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود.	دی ۹۸			
پاسخ	*ثابت*				
۱۶	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است.	خرداد ۹۹			
پاسخ	*درست*				
۱۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \lvert x \rvert$ در دامنه اش صعودی است.	خرداد ۹۹ خ			

پاسخ	نادرست. تابع قدرمطلق در دامنه اش که مجموعه اعداد حقیقی است نه صعودی و نه نزولی  است.				
۱۸	در جای خالی عبارات مناسب قرار دهید. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی تعریف می‌شود، تابع .... گفته می‌شود.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	ثابت				
۱۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. توابع اکیداً یکنوا، همواره .... هستند.	شهریور ۹۹			
پاسخ	یکنوا				
۲۰	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه اش اکیداً نزولی است.	شهریور ۱۴۰۰			
پاسخ	نادرست				
۲۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=x^3$ ، تابع اکیداً صعودی است.	خرداد ۱۴۰۱			
پاسخ	درست . تابع $f(x)=x^3$ ، همواره اکیداً صعودی است.				
۲۲	نمودار تابع $y=x+\|x\|$ را رسم کنید و مشخص کنید، در چه بازه هایی تابع صعودی یا نزولی یا ثابت است. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱			
پاسخ	$f(x)=x+\|x\|=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$  مشاهده می‌شود که تابع f در بازه‌ی $(-\infty,0)$ ثابت و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است. به طور کلی تابع f در $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.				
۲۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر تابع یکنوا ، یک به یک است.	دی ۱۴۰۱			
پاسخ	نادرست . ممکن است تابع یک به یک نباشد. تابع اکیداً یکنوا یک به یک است.				
۲۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بی شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.	خرداد ۱۴۰۲			
پاسخ	درست . در واقع، بی‌شمار تابع ثابت (موازی محور طول‌ها) وجود دارد.				
۲۵	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. تابع $y=\frac{1}{x}$ ، در دامنه اش یکنواست.	شهریور ۱۴۰۲			

پاسخ	نادرست . تابع $y=\frac{۱}{x}$ ، در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی است.				
۲۶	جای خالی را کامل کنید. تابع $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$ ترکیب دو تابع $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و $g(x)=\ldots\ldots\ldots$ است.	دی ۹۷			
پاسخ	$g(x)=x^۲$				
۲۷	توابع $f(x)=\frac{x+۳}{۲x}$ و $g(x)=۳x-۱$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.	دی ۹۷			
پاسخ	$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid ۳x-۱\neq ۰\}=R-\{\frac{۱}{۳}\}$				
۲۸	دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.	خرداد ۹۸			
پاسخ	$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)=\in D_g\}=\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$				
۲۹	اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد. دامنه‌ی تابع fog را به کمک تعریف به دست آورید.	شهریور ۹۸			
پاسخ	$D_f\geq ۱ \quad , \quad D_g=R$ $D_{fog}=\{x\in D_g \mid f(x)=\in D_f\}=\{x\in R \mid ۲x^۲-۱\geq ۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$				
۳۰	اگر $f(x)=x^۲-۵$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$ باشد. دامنه‌ی تابع fog را به کمک تعریف به دست آورید.	دی ۹۸			
پاسخ	$D_g=[-۶,+\infty) \quad , \quad D_f=R$ $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq -۶ \mid \sqrt{x+۶}\in R\}=[-۶,+\infty)$				
۳۱	اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$ باشد. ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹			
پاسخ	$f(g(x))=۳g(x)-۴\xrightarrow{f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴}۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴$ $\rightarrow ۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸\rightarrow g(x)=x^۲-۲x+۶$				
۳۲	اگر $f(x)=\sqrt{۴-۲x}$ و $g(x)=x^۲+۲x-۱$ باشد. الف: دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $(gof)(۲)-\frac{f}{g}(۰)$ را تعیین کنید.	خرداد ۹۹			
پاسخ	الف) $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)=\in D_g\}=\{x\in(-\infty,۲] \mid \sqrt{۴-۲x}\in R\}=(-\infty,۲]$				

	$(gof)(۲)-\frac{f}{g}(۰)=(-۱)-(-۲)=۱$ ب)				
۳۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$ باشد، آنگاه $(gof)(x)=\sqrt{\sin x}$ خواهد بود.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	نادرست $(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sin\sqrt{x}$				
۳۴	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ باشد، آنگاه $(fog)(۴)=.........$	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵$				
۳۵	اگر $f(x)=x^۲-۵$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$ باشد، دامنه‌ی تابع fog را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	$D_f=R$ $D_g=x+۶\ge ۰\to x\ge -۶$ $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)=\in D_f\}=\{x\ge -۶ \mid \sqrt{x+۶}\in R\}=[-۶,+\infty)$				
۳۶	اگر $(fog)(x)=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$ باشد، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	$f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ $\xrightarrow{f(x)=۳x-۴} f(g(x))=۳g(x)-۴$ $\to ۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴\to ۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸$ $\xrightarrow{\div ۳} g(x)=x^۲-۲x+۶$				
۳۷	اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد. الف: دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: ضابطه‌ی تابع fog را بنویسید.	شهریور ۹۹			
پاسخ	الف: $D_f=[۱,+\infty)\quad,\quad D_g=R$ $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ $=\{x\in R \mid ۲x^۲-۱\ge ۱\}=\{x\in R \mid ۲x^۲\ge ۲\}=\{x\in R \mid x^۲\ge ۱\}=(-\infty,۱]\cup[۱,+\infty)$ ب: $(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x^۲-۱)=\sqrt{(۲x^۲-۱)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$				
۳۸	با توجه به نمودارهای توابع f و g به سؤالات زیر پاسخ دهید.	دی ۹۹			



الف: مقدار $(fog)(-۱)$ را محاسبه کنید.

ب: اگر $g(۳t-۱)=۰$ باشد آنگاه مقدار t را به دست آورید.

پ: با محدود کردن دامنه‌ی f ، بازه ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.

پاسخ

پ) $[-۲,+\infty)$ ب) $۳t-۱=-۴ \to t=-۱$ الف) $f(-۳)=۱$

---

۳۹ — خرداد ۱۴۰۰

اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد،

الف: دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(۲)$ را تعیین کنید.

پاسخ

$$D_f=[۱,+\infty)\quad,\quad D_g=R$$

الف) $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid ۲x^۲-۱\in R\}=(-\infty.-۱)\cup[۱,+\infty)$

ب) $(gof)(۲)=۱$

---

۴۰ — شهریور ۱۴۰۰

با توجه به جدول زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف) $(gof)(۱)$ ب) $(fo(f+g))(۰)$

x	-۱	۰	۱	۲
f(x)	۰	-۱	۲	-۵
g(x)	۲	۳	۴	-۲

پاسخ

الف) $g(f(۱))=g(۲)=-۲$

ب) $(f+g)(۰)=-۱+۳=۲$

$(fo(f+g))(۰)=f((f+g)(۰))=f(۲)=-۵$

---

۴۱ — دی ۱۴۰۰

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر $f(۷)=۵$ و $f(۴)=۷$ باشد، آنگاه $(fog)(۴)=۵$

پاسخ درست

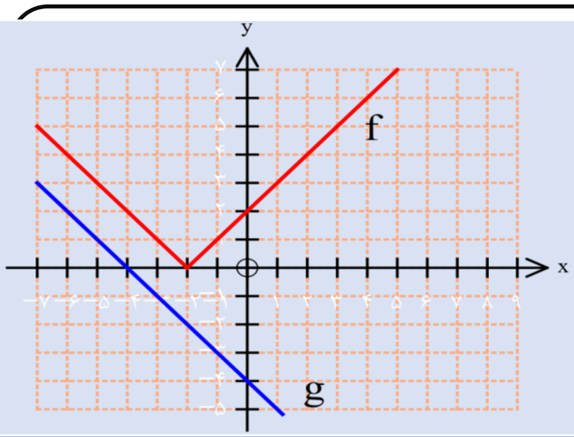
---

۴۲ — دی ۱۴۰۰

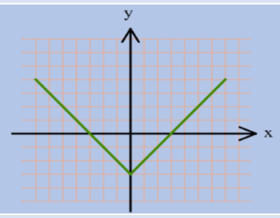
الف: با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$(gof)(-۱)$ و $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$

ب: نمودار تابع $f(x-۲)-۳$ را رسم کنید.



پاسخ



$(gof)(-۱)=g(-۱)=-۵$

$(g^{-۱}of^{-۱})(۲)=g^{-۱}(۰)=-۴$

۴۳ اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

ورودی $x \to ۲x-۲ \to \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \to$ خروجی

پاسخ

$x=۳$

$\to ۲x-۲=۲(۳)-۲=۴$

$\to \frac{x}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۴}{\sqrt{۴}+۱}=\frac{۴}{۳}$

۴۴ اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. (خارج از کشور) (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ

$f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}\xrightarrow{x-۳=۰\to x=۳}D_f=R-\{۳\}$

$g(x)=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{x-۱\geq ۰\to x\geq ۱}D_g=[۱,+\infty)$

$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\geq ۱ \mid \sqrt{x-۱}\neq ۳\right\}=[۱,+\infty)-\{۱۰\}$

۴۵ اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$ باشد تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ

$D_f=\{۰,۵,۳,-۲\}$

$D_g=\{۱,۳,۹,-۱,۷\}$

$f(۰)=-۱\in D_g \to g(f(۰))=g(-۱)=۴$

$f(۵)=۹\in D_g \to g(f(۵))=g(۹)=۰$

$f(۳)=۷\in D_g \to g(f(۳))=g(۷)=۷$

$f(-۲)=۴\notin D_g \to \times$

$D_{gof}=\left\{x \mid x\in D_f : f(x)\in D_g\right\}=\{۰,۳,۵\}$

$gof=\{(۰,۴),(۳,۷),(۵,۰)\}$

۴۶ — دی ۱۴۰۱

اگر $f(x)=7-4x^2$ و $g(x)=\sqrt{x+3}$ باشد.

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(1)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) $D_f=R$ و $D_g=[-3,+\infty)$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\{x\geq -3 \mid \sqrt{x+3}\in R\}=\{-3,+\infty)$$

ب) $(gof)(1)=g(f(1))=g(3)=\sqrt{6}$

۴۷ — خرداد ۱۴۰۲

اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x-1$ باشد، آنگاه :

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید

ب) ضابطه‌ی تابع fog را بنویسید.

پاسخ

الف) $D_{fog}=\left\{x\in R \mid x-1\geq -1\right\}=\{x\in R \mid x\geq 0\}=[0,+\infty)$

ب) $(fog)(x)=f(g(x))=f(x-1)=\sqrt{(x-1)+1}=\sqrt{x}$

۴۸ — شهریور ۱۴۰۲

اگر $f(g(x))=4x^2+1$ و $f(x)=\frac{x}{2}-1$ باشد، آنگاه ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را بیابید.

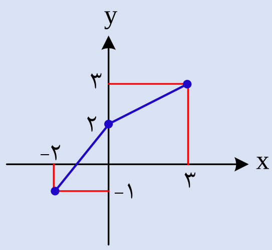
پاسخ

$$f(g(x))=\frac{g(x)}{2}-1\xrightarrow{f(g(x))=4x^2+1}\frac{g(x)}{2}-1=4x^2+1$$

$$\rightarrow g(x)-2=8x^2+2\rightarrow g(x)=8x^2+4$$

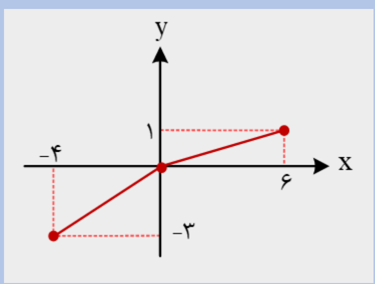
۴۹ — دی ۹۷

با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید.



پاسخ

طول نقاط دو برابر و عرض نقاط ۲ واحد کم می‌شود.



تابع اصلی

x	-۲	۰	۳
y	-۱	۲	۳

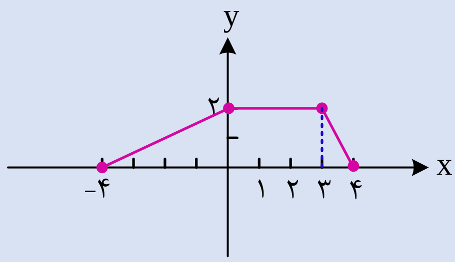
→

تابع جدید

x	-۴	۰	۶
y	-۳	۰	۱

۵۰ — خرداد ۹۸

با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ ، نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.

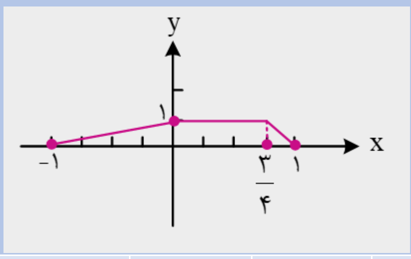


پاسخ طول نقاط تقسیم بر ۴ و عرض نقاط تقسیم بر ۲

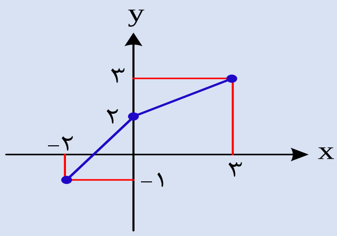
تابع اصلی				
x	-۴	۰	۳	۴
y	۰	۲	۲	۰

→

تابع جدید				
x	-۱	۰	$\frac{۳}{۴}$	۱
y	۰	۱	۱	۰



۵۱ با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})-۱$ را رسم کنید. — تیر ۹۸

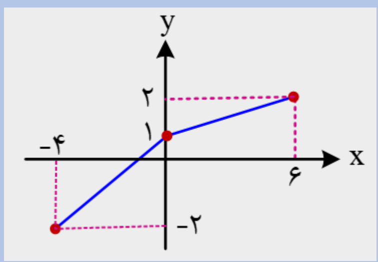


پاسخ طول نقاط نمودار را دو برابر و عرض نقاط را یک واحد کم می‌کنیم.

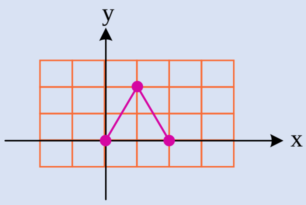
تابع اصلی			
x	-۲	۰	۳
y	-۱	۲	۳

→

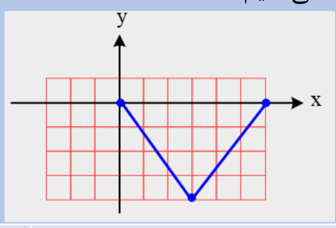
تابع اصلی			
x	-۴	۰	۶
y	-۲	۱	۲



۵۲ نمودار تابع $y=f(x)$ ، به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y=-۲f(\frac{۱}{۳}x)$ را رسم کنید. — شهریور ۹۸



پاسخ طول نقاط را سه برابر و عرض آنها را در ۲- ضرب می‌کنیم.

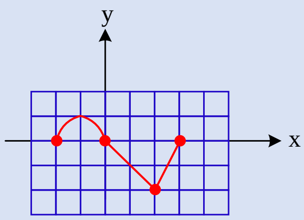


۵۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. — دی ۹۸

برد تابع با ضابطه $y=kf(x)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

پاسخ نادرست

۵۴ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. (خرداد ۹۹)



الف: نمودار تابع $y=۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

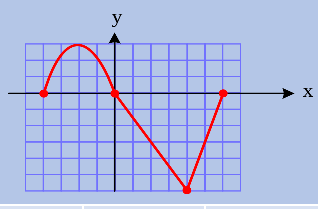
ب: دامنه‌ی تابع $y=۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را تعیین کنید.

پاسخ الف: ابتدا مختصات نقاط مهم تابع اصلی را تعیین می‌کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۲	۳
y	۰	۱	۰	-۲	۰

اکنون طول نقاط دو برابر و عرض نقاط را سه برابر می‌کنیم تا مختصات نقاط مهم تابع جدید بدست آید.

x	-۴	-۲	۰	۴	۶
y	۰	۳	۰	-۶	۰



ب: $D=[-۴,۶]$

۵۵ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خرداد ۹۹ خ)

الف: اگر برد تابع f برابر $[-۱,۴]$ باشد، آنگاه برد تابع $y=۲f(x)$ برابر با .... است.

پاسخ عرض نقاط دو برابر می‌شود و لذا برد تابع جدید می‌شود : $[-۲,۸]$

۵۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۹ خ)

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=-kf(\frac{x}{۲})$ همان دامنه‌ی تابع $y=-kf(x)$ می‌باشد.

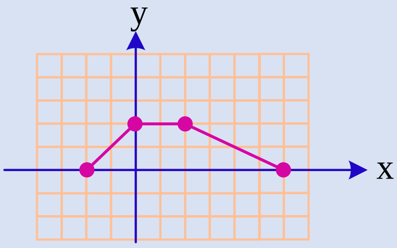
پاسخ نادرست

۵۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (شهریور ۹۹)

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=kf(x)$ همان دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ است.

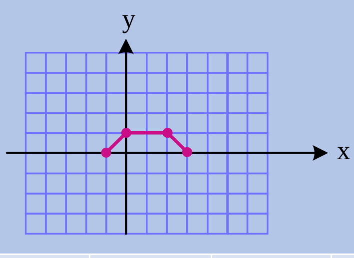
پاسخ درست

۵۸ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}f(۲x)$ را رسم کنید. (شهریور ۹۹)



پاسخ

طول نقاط اصلی نمودار را در $\frac{۱}{۲}$ و عرض آنها را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم.



۵۹ (دی ۹۹)

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

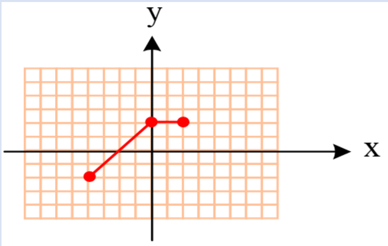
دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=kf(x)$ همان دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ است.

پاسخ

درست

۶۰ (خرداد ۱۴۰۰)

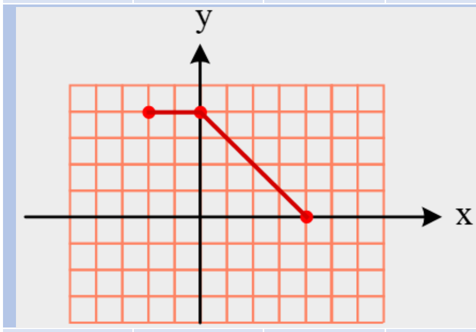
با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ ، نمودار تابع $y=f(-x)+۲$ رسم کنید.



پاسخ

تابع اصلی	x	-۴	۰	۲
	y	-۲	۲	۲

تابع تبدیل یافته	x	۴	۰	-۲
	y	۰	۴	۴



۶۱ (شهریور ۱۴۰۰)

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-۲x+۱$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله‌ی آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی نمودار تابع در هر مرحله را بنویسید.

پاسخ

$f(x)=x^{۲}-۲x+۱=(x-۱)^{۲}$

مرحله ۱ : $f(x)-۲=(x-۱)^{۲}-۲$

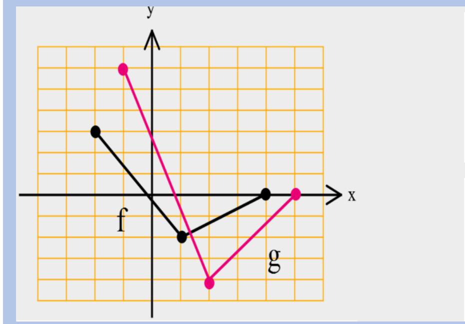
مرحله ۲ : $f(x+۱)-۲=x^{۲}-۲$

مرحله ۳ : $-f(x+۱)+۲=-x^{۲}+۲$

۶۲ (خرداد ۱۴۰۱)

برد تابع f بازه‌ی $[-۳,۱]$ است. برد تابع $y=-۲f(۳x-۱)+۳$ ، کدام یک از موارد زیر است؟

	الف) $(-8,0]$ ب) $(-12,0]$ ج) $[1,9)$ د) $[-10,2]$				
پاسخ	طبق ویژگی های تبدیلات عرض نقاط نمودار تابع f ابتدا در ۲- ضرب می‌شود و سپس با ۳ جمع می‌شود. لذا برد تابع بدین شکل تغییر خواهد کرد. $-3<y\le 1 \xrightarrow{\times(-2)} 6>-2y\ge -2 \xrightarrow{+3} 9>-2y+3\ge 1 \to 1\le -2y+3<9$ لذا گزینه‌ی ج درست است.				
۶۳	نمودار تابع f به صورت روبرو است. الف) نمودار تابع $g(x)=2f(x-1)$ را رسم کنید. ب) دامنه‌ی تابع g را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱			
پاسخ	الف) طول نقاط نمودار تابع f یک واحد اضافه می‌شوند ولی عرض نقاط دو برابر می‌شود.				



f	x	-۲	۱	۴
	y	۳	-۲	۰

↓

g	x	-۱	۲	۵
	y	۶	-۴	۰

ب) $[-1,5]$

۶۴	اگر دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ برابر $(-1,3]$ و برد آن $(0,2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f(\frac{x}{2})$ را بیابید.	دی ۱۴۰۱			
پاسخ	طول نقاط دو برابر می‌شود ولی عرض نقاط تغییر نمی‌کند. $-1<x\le 3 \xrightarrow{\times 2} -2<\frac{x}{2}\le 6 \Rightarrow D_{f(\frac{x}{2})}=(-2,6]$ $R_{f(\frac{x}{2})}=R_f=(0,2]$				
۶۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. نقطه‌ی $(-2,4)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(2x)$ برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۲			
پاسخ	$(-1,4)$ ، زیرا فقط طول نقطه را نصف می‌کنیم.				
۶۶	نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع جدید را بنویسید.	شهریور ۱۴۰۲			
پاسخ	با توجه به مفاهیم تبدیل نمودار توابع می‌توان نوشت : $y=2\sqrt{x-3}$				
۶۷	اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(5)$ را به دست آورد.	دی ۹۷			
پاسخ	$(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=4$				

۶۸	اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(5)$ را به دست آورید.	تیر ۹۸			
پاسخ	$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(x)=8(x+3) \\ g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{f^{-1}(5)=8(5+3)=64} g^{-1}of^{-1}(5)=g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4$				
۶۹	اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(5)$ را به دست آورید.	شهریور ۹۸			
پاسخ	به پاسخ سؤال قبلی مراجعه کنید.				
۷۰	با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^2-5$ تابعی وارون پذیر بسازید. دامنه‌ی تابع جدید را بنویسید.	دی ۹۸			
پاسخ	$h(x)=x^2-5 \quad ; \quad x\geq 0$				
۷۱	نشان دهید که توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگر هستند.	دی ۹۸			
پاسخ	کافی است که نشان دهیم: $(fog)(x)=x$ و $(gof)(x)=x$ $(fog)(x)=f(\frac{x+4}{3})=3(\frac{x+4}{3})-4=x$ $(gof)(x)=g(3x-4)=\frac{(3x-4)+4}{3}=x$				
۷۲	الف: وارون تابع $y=\sqrt{x+2}$ را به دست آورید. ب: با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	الف : $y=\sqrt{x+2}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{y+2}\rightarrow x^2=(\sqrt{y+2})^2\rightarrow x^2=y+2\rightarrow x^2-2=y$ $\rightarrow f^{-1}(x)=x^2-2$ ب : این تابع یک سهمی رو به بالا است. طول رأس سهمی به صورت زیر است. $x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2(1)}=2$ لذا تابع در بازه‌های نظیر $(-\infty,2)$ یا $(2,+\infty)$ یک به یک خواهد بود. توجه: بازه هایی دیگر نیز می‌توان نوشت و از طرف ۲ نیز، بازه را می‌توان بسته نوشت.				
۷۳	نشان دهید توابع $f(x)=\frac{-8x+3}{2}$ و $g(x)=\frac{3-2x}{8}$ وارون یکدیگر هستند.	خرداد ۹۹ خ			
پاسخ	باید نشان دهیم که $f(g(x))=x$ و $g(f(x))=x$				

$$f(g(x))=f(\frac{۳-۲x}{۸})=\frac{-۸(\frac{۳-۲x}{۸})+۳}{۲}=\frac{-(۳-۲x)+۳}{۲}=\frac{-۳+۲x+۳}{۲}=\frac{۲x}{۲}=x$$

$$g(f(x))=g(\frac{-۸x+۳}{۲})=\frac{۳-۲(\frac{-۸x+۳}{۲})}{۸}=\frac{۳-(-۸x+۳)}{۸}=\frac{۳+۸x-۳}{۸}=\frac{۸x}{۸}=x$$

۷۴	ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳$ را به دست آورید.	شهریور ۹۹		

پاسخ

$$f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳$$

$$y=-\frac{۷}{۲}x-۳\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-\frac{۷}{۲}y-۳\rightarrow x+۳=-\frac{۷}{۲}y$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{۲}{۷})}-\frac{۲}{۷}x-\frac{۶}{۷}=y\rightarrow y=-\frac{۲x+۶}{۷}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$$

۷۵	ضابطه‌ی وارون تابع $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$ را به دست آورید.	دی ۹۹		

پاسخ

$$y=-۵-\sqrt{۳x+۱}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-۵-\sqrt{۳y+۱}\rightarrow x+۵=-\sqrt{۳y+۱}\rightarrow(x+۵)^۲=۳y+۱$$

$$\rightarrow\frac{(x+۵)^۲-۱}{۳}=y$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{(x+۵)^۲-۱}{۳}$$

۷۶	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. دو تابع با ضابطه های $f(x)=x^۳$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ وارون یکدیگر هستند.	شهریور ۱۴۰۰		
پاسخ	درست			
۷۷	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. دو تابع $f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳$ و $g(x)=-\frac{۲x+۷}{۶}$ وارون یکدیگر هستند.	دی ۱۴۰۰		
پاسخ	نادرست			
۷۸	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۵)\}$ باشد، آنگاه حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۱		
پاسخ	$f(۲)=۳\rightarrow f^{-۱}(۳)=۲$			
۷۹	نشان دهید که توابع $f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳$ و $g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$ وارون یکدیگرند. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱		

پاسخ	کافی است که نشان دهیم : $(fog)(x)=x$ و $(gof)(x)=x$ $(fog)(x)=f(g(x))=f(-\frac{۲x+۶}{۷})=-\frac{۷}{۲}(-\frac{۲x+۶}{۷})-۳=\frac{۲x+۶}{۲}-۳=\frac{۲x}{۲}=x$ $(gof)(x)=g(f(x))=g(-\frac{۷}{۲}x-۳)=-\frac{۲(-\frac{۷}{۲}x-۳)+۶}{۷}=-\frac{(-۷x-۶)+۶}{۷}=x$					
۸۰	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. ضابطه‌ی تابع وارون $y=x^{۳}$ ، برابر .... است.	شهریور ۱۴۰۱				
پاسخ	$y=\sqrt[۳]{x}$					
۸۱	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $f(x)=۲x^{۳}-۱$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۱۵)$ برابر .... است.	دی ۱۴۰۱				
پاسخ	$f(x)=۲x^{۳}-۱\xrightarrow{f^{-۱}(۱۵)=a\to f(a)=۱۵}۲a^{۳}-۱=۱۵\to a=۲$					
۸۲	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x-۱}$ باشد، مقدار $(fof^{-۱})(۵)$ برابر با .... است.	خرداد ۱۴۰۲				
پاسخ	می‌دانیم که $(fof^{-۱})(x)=x$ ، پس : $(fof^{-۱})(۵)=۵$					
۸۳	اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$ برابر $[-۲,+\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه‌ی تابع وارون را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲				
پاسخ	تابع $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$ ، یک سهمی است و دامنه‌ی آن ، مجموعه اعداد حقیقی است. این تابع در دامنه اش یک به یک نیست و وارون پذیر نمی‌باشد ، ولی در بازه‌ی $[-۲,+\infty)$ یک به یک و وارون پذیر است. $f(x)=x^{۲}+۴x+۳\to f(x)=(x^{۲}+۴x+۴)-۱\to f(x)=(x+۲)^{۲}-۱$ رأس سهمی $(-۲,-۱)$ می‌باشد. برد این تابع نیز به شکل $R_f=[-۱,+\infty)$ است. برای تعیین وارون تابع، به شکل زیر عمل می‌کنیم. $y=(x+۲)^{۲}-۱$ $\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=(y+۲)^{۲}-۱\to x+۱=(y+۲)^{۲}\to\sqrt{x+۱}-۲=y$ $\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۱}-۲$ $D_{f^{-۱}}=R_f=[-۱,+\infty)$					