معرفی خط:

◂ **معادلهٔ خط:** به رابطهٔ بین طول و عرض نقاط یک خط، معادلهٔ خط گفته می‌شود. معادلهٔ خط به دو صورت زیر نشان داده می‌شود:

الف) شکل استاندارد معادلهٔ خط: $y = mx + h$

ب) شکل کلاسیک معادلهٔ خط: $ax + by + c = ۰$

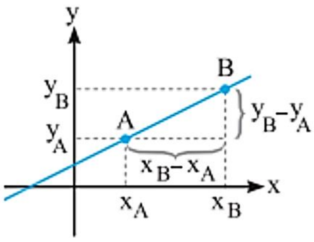
شیب خط:

الف) اگر معادلهٔ استاندارد خط را داشته باشیم شیب، برابر ضریب x است. $y = mx + h \Rightarrow \text{شیب خط} = \text{ضریب } x = m$

ب) اگر معادلهٔ کلاسیک را داشته باشیم، می‌توان گفت:

$$ax + by + c = ۰ \Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$

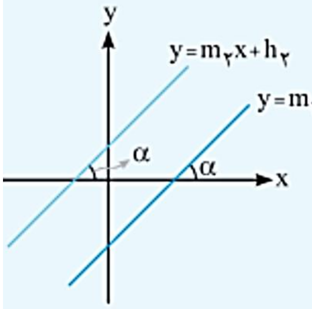
پ) اگر دو نقطهٔ متفاوت A و B از خط را با مختصات $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ به ما داده باشند، شیب خط را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تغییرات } y}{\text{تغییرات } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

دو خط موازی:

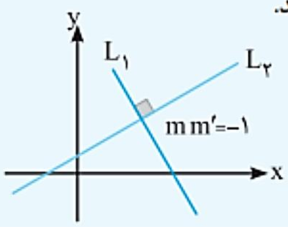
۲ شیب دو خط موازی با هم برابر است.



$$\Rightarrow m_۱ = m_۲ = \tan\alpha$$

دو خط عمود برهم:

دو خط غیرموازی با محورهای مختصات، بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-۱) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشند، آن‌گاه شرط عمود بودن آن‌ها، آن است که $mm' = -۱$ به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینه و معکوس شیب دیگری باشد.



$$m' = -\frac{۱}{m}$$

سوال۱:

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) شیب‌های دو خط عمود بر هم، قرینه‌ی یکدیگرند.

ب) شیب خط عمود بر خط $۲y - ۳x = ۱$ برابر $\frac{-۲}{۳}$ است.

پ) خطوط $L : ۴x - ۶y = ۳$ و $L' : ۶x - ۹y = ۵$ با هم موازی‌اند.

ت) دو خط $y = ۳x - ۲$ و $y = \frac{۱}{۳}x + ۲$ بر هم عمودند.

نوشتن معادله خط:

◂ **نحوهٔ به‌دست آوردن معادلهٔ خط:** برای به‌دست آوردن معادلهٔ خط به دو مورد زیر نیاز داریم:

۱ شیب خط

۲ یک نقطه از آن خط

فرض کنید برای خط d، شیب برابر m و مختصات یک نقطهٔ دلخواه روی خط $A(x_A , y_A)$ را داریم. در این صورت معادلهٔ خط برابر است با: $y - y_A = m(x - x_A)$

این روش کلی به‌دست آوردن معادلهٔ خط است.

سوال۲:

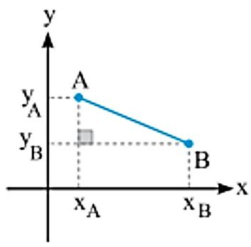
معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $A(۵ , -۳)$ گذشته و بر خط $x - ۲y + ۵ = ۰$ عمود باشد.

سوال۳:

معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A(۲ , ۴)$ را بنویسید به‌طوری که با خط $y = ۳x + ۲$ موازی باشد.

فاصله دو نقطه:

بدین ترتیب برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B در حالت کلی می‌توان گفت:



فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E , y_E)$ تا مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ برابر است با: $OE=\sqrt{x_E{}^۲+y_E{}^۲}$

سوال ٤:

نقاط $A(۲ , ۵)$، $B(۲ , ۱)$ و $C(۶ , ۱)$ سه رأس یک مثلث هستند.

الف) نوع مثلث را مشخص کنید. (با راه حل کامل)

ب) مساحت مثلث را بیابید.

مختصات نقطه وسط:

بدین ترتیب مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، همان میانگین مختصات دو نقطهٔ $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ است و برابر است با:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲} , \frac{y_A+y_B}{۲})$$

سوال ۵:

دو نقطه‌ی $A(۱۲ , ۶)$ و $B(-۳ , -۸)$ را در نظر بگیرید.

فاصله‌ی نقطه‌ی $C(۱ , ۱)$ از وسط پاره‌خط AB را به دست آورید

سوال ٦:

مثلث با رأس‌های $A(۲ , ۱)$، $B(۳ , ۴)$ و $C(۵ , ۰)$ را در نظر بگیرید.

الف) طول میانه‌ی AM را محاسبه کنید.

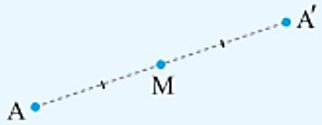
ب) معادله‌ی میانه‌ی AM را به دست آورید.

قرینه نقطه نسبت به نقطه:

مختصات نقطهٔ $A'(x_{A'} , y_{A'})$، قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A , y_A)$ نسبت به نقطهٔ $M(x_M , y_M)$ برابر است با:

$$A'(۲x_M-x_A , ۲y_M-y_A)$$

دقت کنید که M وسط پاره‌خط AA' است.



به عبارت دیگر:

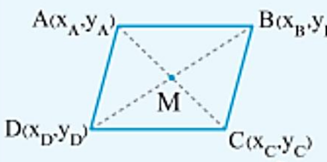
قرینهٔ نقطهٔ $A(x_A , y_A)$ نسبت به مبدأ برابر است با: $A'(-x_A , -y_A)$

سوال ۷:

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۲ , ۱)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(۴ , ۲)$ به دست آورید.

رابطه مختصات متوازی الاضلاع

در متوازی‌الاضلاع ABCD، با توجه به این‌که قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، می‌توان گفت:

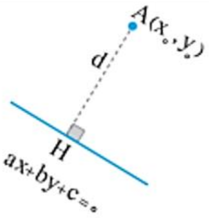


$$\text{ABCD}\ \text{متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

سوال ۸:

نقاط $A(۲ , ۳)$، $B(۳ , ۵)$ و $C(-۱ , ۷)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

فاصله نقطه از خط:



فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$AH=d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

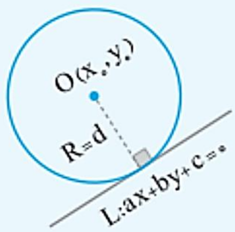
تذکر: هنگام استفاده از رابطهٔ بالا باید تمام جملات معادلهٔ خط یک سمت باشند.

سوال۹:

یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=3x-2$ واقع است. اگر $A(5,1)$ یکی از رأس‌های مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید.

کاربرد مهم فاصله نقطه از خط

فاصلهٔ هر خط مماس بر دایره تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.



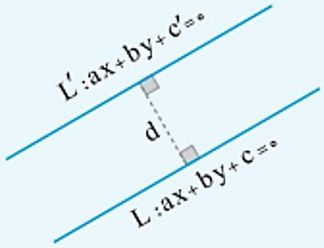
$$R=d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

سوال۱۰:

خط $2x-5y=0$ بر دایره‌ای به مرکز $(-4,1)$ مماس است. شعاع دایره، محیط و مساحت دایره را به‌دست آورید.

فاصله و معادله وسط دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی L و L' که معادلهٔ آن‌ها به صورت $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ می‌باشد برابر است با:



$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

سوال۱۱:

الف) نشان دهید دو خط به معادلات $x-5y=6$ و $2x=10y+1$ با هم موازی‌اند.

ب) فاصله‌ی بین این دو خط را بیابید.

جواب های معادله درجه دوم

در هر معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $ax^2+bx+c=0$، دلتا برابراست با:

$\Delta=b^2-4ac$

جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$	علامت دلتا
$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\Delta>0$
$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	$\Delta=0$
معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.	$\Delta<0$

ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را در دو حالت خاص زیر می‌توان ساده‌تر به‌دست آورد:

$a+b+c=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$: مجموع ضرایب برابر صفر باشد.

$a+c=b\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-\frac{c}{a}\end{cases}$: جمع ضرایب توان‌های زوج باضریب توان فرد برابر باشد.

تغییر متغیر برای حل معادله

گاهی اوقات یک معادله به شما می‌دهند که شبیه معادلهٔ درجه ۲ است که قابل تبدیل به یک معادلهٔ درجه ۲ می‌باشد.
برای این‌که این معادلات به معادلهٔ درجه ۲ تبدیل شوند باید از یک تغییر متغیر مناسب استفاده کرد.

سوال۱۲:

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$

ب) $۵x^۶ - ۷x^۳ + ۲ = ۰$

جمع و ضرب ریشه های معادله

برای معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(\Delta > ۰)$ داریم:

مجموع دو ریشه $= S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب دو ریشه $= P = x_۱ \times x_۲ = \frac{c}{a}$

سوال۱۳:

در معادله‌ی $۷x^۲ - ۲۸x = ۴۲$، بدون حل معادله، مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

ساختن معادله درجه دوم

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ای با دو ریشهٔ α و β تشکیل دهیم به گونه‌ای که مجموع دو ریشه $(S = \alpha + \beta)$ و حاصل‌ضرب دو ریشه $(P = \alpha\beta)$ را داشته باشیم. در این صورت معادله به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$x^۲ - Sx + P = ۰$

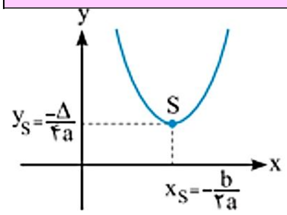
سوال۱۴:

معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۳ + \sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲} - ۳$ باشد.

سوال۱۵:

محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب برابر ۴۸ و ۱۴۳ است. طول و عرض مستطیل را بیابید.

ماکزیمم و مینیمم سهمی



یادآوری: سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ را در نظر بگیرید. در این سهمی طول رأس سهمی برابر $x_S = -\frac{b}{۲a}$ و عرض رأس سهمی برابر $y_S = -\frac{\Delta}{۴a}$ است.

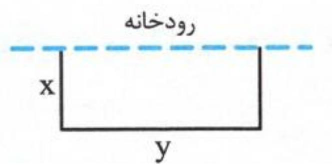
برای به‌دست آوردن ماکزیمم و مینیمم سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، به وسیلهٔ علامت a می‌توان متوجه شد که سهمی ماکزیمم یا مینیمم دارد و با قرار دادن $x_S = -\frac{b}{۲a}$ در معادله می‌توان ماکزیمم یا مینیمم مربوطه (y_S) را به‌دست آورد.

سوال۱۶:

مختصات رأس سهمی $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۸x + ۱۰$ را بیابید. نوع آن را (ماکزیمم یا می‌نیمم) مشخص کنید.

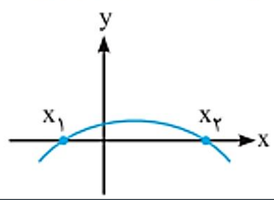
سوال۱۶:

با طنابی به طول ۳۰۰ متر مـی‌خـواهیم قطعه زمینی به شـکل مستطیل را که در یک طـرف آن رودخانـه اسـت، محصـور کنـیم. ماکزیمم مساحت این زمین را بیابید.



صفر های تابع درجه دوم

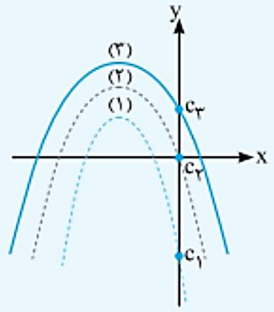
نقاط برخورد یک تابع با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. به عبارت دیگر مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است. ($x_۱$ و $x_۲$ صفرهای تابع‌اند.)



علامت ضرایب در معادله درجه دوم

❶ از روی جهت دهانهٔ سهمی، علامت a مشخص می‌شود.

❷ در نمودار سهمی مربوطه، c برابر عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها است.

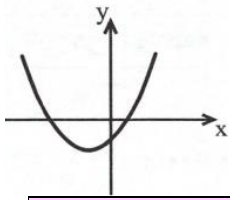


$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow f(0)=c_1<0 \\ (2) \Rightarrow f(0)=c_2=0 \\ (3) \Rightarrow f(0)=c_3>0 \end{cases}$$

۳- برای تعیین b به شیب نمودار در نقطه c توجه میکنیم

سوال۱۷:

در شکل مقابل، نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ داده شده است. علامت ضرایب a، b و c و تعداد و علامت صفرهای آن را مشخص کنید.



تحلیل علامت ریشه ها

به کمک نمودار درختی زیر، به راحتی می‌توان تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را که همان صفرهای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند، به‌دست آورد.

❶ $\Delta>0$ (دو ریشه حقیقی) $\Rightarrow$
- $P>0 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت $\Rightarrow$
  - $S>0 \Rightarrow$ دو ریشه +
  - $S<0 \Rightarrow$ دو ریشه −
- $P=0 \Rightarrow$ یک ریشه صفر $\Rightarrow$
  - $S>0 \Rightarrow$ یکی ۰ و یکی +
  - $S<0 \Rightarrow$ یکی ۰ و یکی −
- $P<0 \Rightarrow$ یکی + و یکی − $\Rightarrow$
  - $S>0 \Rightarrow$ |ریشهٔ منفی| < ریشهٔ مثبت
  - $S<0 \Rightarrow$ |ریشهٔ منفی| > ریشهٔ مثبت

❷ $\Delta=0$ (یک ریشه مضاعف) $\Rightarrow$
- $\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف +
- $\frac{-b}{2a}<0 \Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف −

❸ $\Delta<0 \Rightarrow$ فاقد ریشهٔ حقیقی

سوال۱۸:

با توجه به ضرایب معادله و علامت آنها، در مورد تعداد و علامت‌های ریشه‌های معادله $3x^2-x-1=0$ بحث کنید. (بدون حل معادله)

نوشتن معادله سهمی از نمودار

حالت اول: با داشتن سه نقطه (به‌جز رأس) از سهمی می‌توان به کمک سه معادله و سه مجهول مقادیر a، b و c را به‌دست آورد.

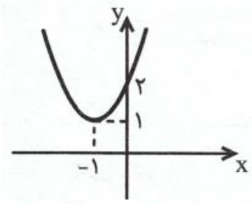
حالت دوم: با داشتن مختصات رأس و یک نقطهٔ دیگر می‌توان معادلهٔ سهمی را به‌دست آورد.

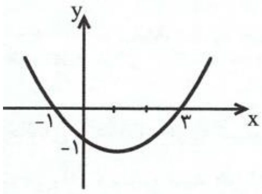
فرض کنید (x_S, y_S) مختصات رأس سهمی باشد در این صورت معادلهٔ زیر، معادلهٔ سهمی است که مقدار a با داشتن یک نقطهٔ دیگر از تابع به‌دست می‌آید. $y=a(x-x_S)^2+y_S$

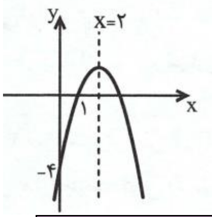
حالت سوم: اگر x_1 و x_2 صفرهای سهمی باشند و مختصات یک نقطهٔ دیگر را نیز داشته باشیم، معادلهٔ سهمی را می‌توان به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ در نظر گرفت، سپس می‌توان با قرار دادن مختصات نقطهٔ دیگر، معادلهٔ سهمی را تکمیل کرد.

سوال۱۹:

معادله سهمی مربوط به نمودار مقابل را بیابید.







معادله گویا و روش حل آن

به معادله‌ای که مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای) قراردارد، معادلهٔ گویا می‌گویند.

برای حل معادلات گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود و جواب‌های به‌دست آمده **نباید** مخرج کسرها را صفر کنند. هم‌چنین این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

سوال۲۰:

معادله‌ی $\frac{x}{x^2+2x}=\frac{2}{x}-\frac{3x}{x+2}$ را حل کنید.

سوال۲۱:

معادله‌ی $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$ را حل کنید.

کاربرد معادله گویا

اگر دو شخص (وسیله) A و B کاری را به ترتیب در مدت زمان t_A و t_B انجام دهند و هم‌چنین مدت زمانی که دو شخص (وسیله) با هم کار را انجام دهند t_{A+B} باشد، می‌توان معادلهٔ در مدت ۱ ساعت انجام می‌دهند.

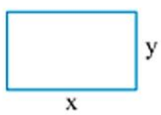
به عبارت دیگر: $\frac{1}{t_{A+B}}=\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}$

سوال۲۲:

اگر دو نقاش با هم کار کنند، خانه‌ای را در ۳ روز رنگ می‌زنند، اما اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، نقاش اول خانه را ۸ روز زودتر رنگ می‌زند. حساب کنید هر کدام از نقاش‌ها خانه را در چند روز رنگ می‌زنند.

مستطیل طلایی

مستطیل طلایی: مستطیلی که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر نسبت طول به عرض باشد، مستطیل طلایی است؛ به عبارت دیگر:



$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می‌گویند.

برای به‌دست آوردن نسبت طلایی $y=1$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}\xrightarrow[(x\neq 0)]{\text{طرفین وسطین}}x+1=x^2\Rightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{ق ق}\\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

معادلات رادیکالی

به طور کلی به معادلاتی که متغیر زیر رادیکال باشد، معادلات رادیکالی می‌گویند. برای آشنایی با این معادلات به مثال بعد دقت کنید.

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد، سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد پس از حل معادله، باید اعداد به‌دست آمده را در معادلهٔ اولیه جای‌گذاری کنیم اعدادی جواب معادله هستند که در آن صدق کنند.

سوال۲۳:

معادله‌ی $x=\sqrt{x+16}+4$ را حل کنید.

سوال۲۴:

معادله‌ی $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+1}=2$ را حل کنید.

معادلات بی جواب رادیکالی

حاصل رادیکال هر عدد حقیقی برابر مقداری نامنفی است.

$\sqrt{u}\geq 0$

سوال۲۵:

بدون حل معادله‌ی زیر، توضیح دهید که چرا این معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است.

$$\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=0$$

سوال۲٦:

معادله‌ی $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$ را حل کنید.