

مجموعه اعداد:

برخی از مجموعه‌هایی را که در سال قبل با آن آشنا شدید، در زیر ملاحظه می‌کنید.

مجموعه اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

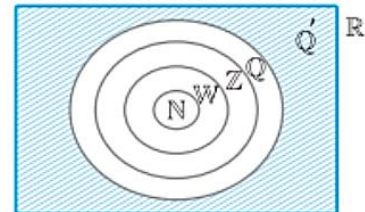
مجموعه اعداد گویا: $Q = \{\frac{m}{n} | m, n \in Z, n \neq 0\}$

مجموعه اعداد گنگ: $Q' = R - Q$

مجموعه اعداد حقیقی: $R = Q \cup Q'$

ارتباط مجموعه اعداد:

وضعیت مجموعه‌های اعداد در ارتباط با هم را می‌توان در نمودار ون زیر نشان داد:



به بیان دیگر:
 $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$
 $Q \cup Q' = R$
 $Q \cap Q' = \emptyset$

سوال ۱:

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$N \subset Z \subset W \subset R$

$\sqrt{3} \in (R - Q)$

سوال ۲:

جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب کامل کنید.
 (مجموعه‌ی $W - N$ ، عضو دارد.

$Z - (W - N) = \dots\dots\dots$

مجموعه‌ی $R - Q$ ، نام دارد.

معرفی بازه‌ها:

نمایش هندسی	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نوع بازه
	$[a, b]$	$\{x \in R a \leq x \leq b\}$	بسته
	(a, b)	$\{x \in R a < x < b\}$	باز
	$[a, b)$	$\{x \in R a \leq x < b\}$	نیم‌باز
	$(a, b]$	$\{x \in R a < x \leq b\}$	نیم‌باز
	$[a, +\infty)$	$\{x \in R x \geq a\}$	نیم‌باز
	$(-\infty, b]$	$\{x \in R x \leq b\}$	نیم‌باز
	$(a, +\infty)$	$\{x \in R x > a\}$	باز
	$(-\infty, b)$	$\{x \in R x < b\}$	باز

سوال ۳:

جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب کامل کنید.

حاصل $(-1, 2] \cup (0, 3)$ برابر است با

اگر $A = [-3, 4]$ و $B = [-2, 3]$ ، آنگاه $A \cap B = \dots\dots\dots$

سوال ۴:

اگر $A = [1, +\infty)$ ، $B = (-\infty, 4]$ و $C = (-1, 3)$ ، آنگاه مجموعه‌ی $(A \cap B) - C$ را به صورت بازه بنویسید.

مجموعه متناهی و نامتناهی:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است را متناهی می‌نامند. مانند تعداد مولکول‌های آب روی کره زمین یا تعداد کل انسان‌های متولدشده روی کره زمین از ابتدا تاکنون.

مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگ‌تر است مانند خود مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از یک میلیون.

سوال ۵:

متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۴

ب) $A = \{(-1)^n | n \in N\}$

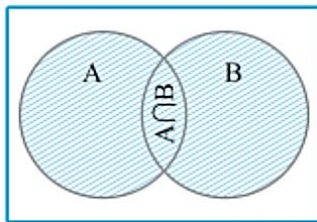
پ) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

ت) بازه‌ی $(1, 3)$

ث) مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی

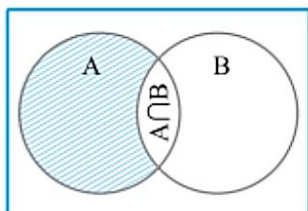
تعداد اعضای اجتماع و تفاضل دو مجموعه

۱ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



$n(A \cup B)$ یعنی تعداد عضوهایی که در A یا در B هستند. $n(A \cap B)$ یعنی تعداد عضوهایی که هم در A و هم در B هستند.

۲ $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



$n(A - B)$ یعنی تعداد عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند یا تعداد عضوهایی که فقط در A هستند.

سوال ۸:

در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند و ۵ نفر عضو هیچ یک از دو تیم نیستند.

- الف) چند نفر در هر دو تیم بازی می کنند؟
- ب) چند نفر حداقل در یک تیم بازی می کنند؟
- پ) چند نفر فقط در تیم فوتبال بازی می کنند؟

سوال ۹:

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 150$ ، $n(A) = 25$ ، $n(B) = 48$ و $n(A \cap B) = 15$ مطلوب است:

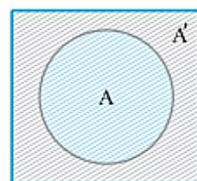
- الف) $n(A \cup B)$
- ب) $n(A \cap B')$
- پ) $n(A' \cap B')$

مجموعه مرجع و مجموعه متمم

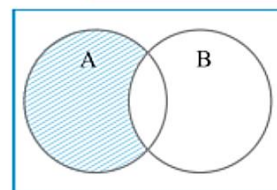
در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نمایش می‌دهیم.

مجموعه متمم: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به بیان دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

- ۱ $A \cup A' = U$
- ۲ $A \cap A' = \emptyset$



۳ $A - B = A \cap B'$



۴ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۵ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

سوال ۶:

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) $A \cap A' = \emptyset$

ب) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

پ) اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $A' \subseteq B'$ است.

ت) اگر U مجموعه‌ی مرجع نامتناهی، A و $A \subseteq U$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد، A' مجموعه‌ای متناهی است.

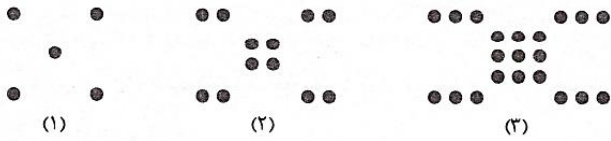
سوال ۷:

اگر $A = \{2, 4, 5\}$ ، $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$ و $B = \{2, 3, 5, 6\}$ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

- الف) $(A - B)'$ =
- ب) $A' \cap B' =$

سوال ۱۱:

جمله‌ی عمومی الگوی زیر را بنویسید و با توجه به جمله‌ی عمومی، جمله‌ی ششم را حساب کنید. آیا این الگو خطی است؟



سوال ۱۲:

برای هر یک از دنباله‌های درجه دوم زیر جمله‌ی عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام یک الگوی هندسی بکشید.

الف) ... , ۲۹ , ۲۰ , ۱۳ , ۸ , ۵

ب) ... , ۳۹ , ۲۳ , ۱۱ , ۳

دنباله و جمله عمومی آن

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم و این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

به عنوان مثال ... , ۱۳ , ۹ , ۷ , ۵ , ۱ یک دنباله است.

جمله عمومی دنباله: جمله n ام یک دنباله را جمله عمومی دنباله می‌نامند.

سوال ۱۳:

جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $t_n = \frac{3n-1}{2n+4}$ است.

الف) چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید.

ب) چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۲ است؟

پ) جمله‌ی هشتم دنباله را به دست آورید.

الگوی خطی:

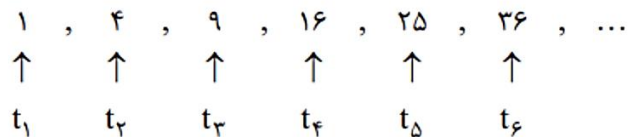
الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها $t_n = an + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) می‌باشد را الگوی خطی می‌نامند. در الگوهای خطی اختلاف دو جمله متوالی، عددی ثابت و برابر a می‌باشد.

سوال ۱۰:

در یک الگوی خطی، جملات پنجم و یازدهم، به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می‌باشند. الف) جمله‌ی عمومی الگو را بنویسید. ب) جمله‌ی چهل و پنجم الگو را مشخص کنید.

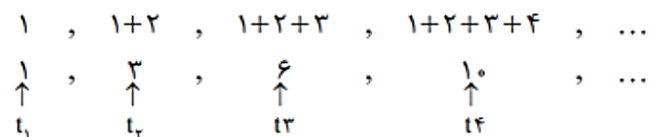
الگوی غیر خطی

الگوی مربعی: الگویی است که هر جمله را به مربع شماره همان جمله نسبت می‌دهد.



الگوی مثلثی: الگویی است که هر جمله را به مجموع اعداد یک تا شماره آن جمله نسبت می‌دهد. جملات این الگو از

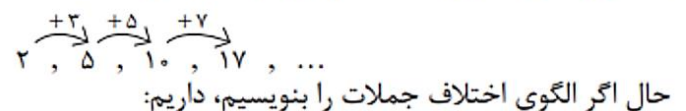
$$\text{فرمول } t_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ پیروی می‌کنند.}$$



الگوی درجه دوم: الگویی است که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) می‌باشد.

در این الگو اختلاف جملات متوالی الگو، خود تشکیل الگوی خطی می‌دهند که اختلاف ثابت جملات این الگوی خطی، دو برابر ضریب n^2 یعنی $2a$ می‌باشد.

به عنوان مثال الگوی $t_n = n^2 + 1$ را در نظر بگیرید.



می‌بینید که اختلاف جملات ثابت است و الگو خطی می‌باشد و این اختلاف ثابت بین جملات الگوی خطی، دو برابر ضریب n^2 یعنی $2a$ می‌باشد.

دنباله بازگشتی

دنباله‌ای که هر جمله آن با نظم خاصی از روی جملات قبلی‌اش پیدا شود را دنباله بازگشتی می‌نامند. مشهورترین دنباله بازگشتی، دنباله فیبوناتچی است که در آن جملات اول و دوم برابر عدد یک هستند و از جمله سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جمله قبلی به دست می‌آید.

دنباله فیبوناتچی: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$

وضابطه آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_{n+2} = t_n + t_{n+1} \end{cases}$$

سوال ۱۴:

جاهای خالی را با اعداد یا کلمات مناسب کامل کنید.
جمله‌ی هشتم دنباله‌ی $1, 1, 2, 3, \dots$ برابر است.

دنباله حسابی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌نامند و با d نمایش می‌دهند. جمله عمومی هر دنباله حسابی به صورت زیر می‌باشد:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

↑ ↑
جمله اول قدرنسبت

سوال ۱۵:

در یک دنباله‌ی حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20 و 56 است
الف) قدرنسبت و جمله اول را به دست آورید.
ب) جمله عمومی دنباله را به دست آورید.
پ) جمله یازدهم دنباله را به دست آورید.

واسطه حسابی

اگر سه عدد a, b, c و b تشکیل دنباله حسابی بدهند، b را واسطه حسابی دو عدد a و c می‌نامند و داریم:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

سوال ۱۶:

اگر $3x-3, 7x+5$ و $3x+16$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشد، مقدار x را حساب کنید.

درج واسطه حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b ، تعداد m واسطه حسابی درج کنیم تا همگی با هم تشکیل دنباله حسابی بدهند، یعنی:

$$a, \underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_m, b$$

تا واسطه حسابی

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

آن‌گاه قدرنسبت برابر می‌شود با:

سوال ۱۷:

بین 18 و 62 سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

دنباله هندسی

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌نامیم و با r نمایش می‌دهیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد. جمله عمومی هر دنباله هندسی به صورت زیر می‌باشد:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \quad (t_1, r \neq 0)$$

↑ ↑
قدرنسبت جمله اول

سوال ۱۸:

جملات چهارم و هفتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب 15 و 405 است. مقدار جمله اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

واسطه هندسی

اگر سه عدد a, b, c و b تشکیل دنباله هندسی بدهند، b را واسطه هندسی a و c می‌نامند و داریم:

$$b^2 = ac$$

سوال ۱۹:

به ازای کدام مقدار x اعداد $4x+3, 2x-1, x$ با همین ترتیب تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

یادداشت

درج واسطه هندسی

اگر بخواهیم بین دو عدد b و a تعداد m واسطه هندسی درج کنیم تا همگی با هم تشکیل دنباله هندسی بدهند، یعنی:

$$a, \underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_m, b$$

m تا واسطه هندسی

$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \quad \text{آن گاه، قدر نسبت برابر می شود با:}$$

سوال ۲۰:

بین ۳ و ۹۶ چهار واسطه هندسی قرار دهید.

کاربرد دنباله مثلثی

برای به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

سوال ۲۱:

حاصلضرب ۲۰ جمله اول دنباله های هندسی زیر را به دست آورید.

(الف) $2, 4, 8, \dots$

(ب) $3, 9, 27, \dots$

Lined writing area on the left side of the page.

Lined writing area on the right side of the page.