فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

برای استفاده بهتر از جلسات کلاس حضوری از محتویات سایت **aliahmadimath.ir** استفاده کنید .

ارتباط با سایر صفحات مرتبط با کلاس
(اسکن QR مقابل)

درس ۱
آشنایی با منطق

گزاره
جدول ارزش گزاره ها
گزاره نما
دامنهٔ متغیر گزاره نما
ترکیب گزاره ها
نقیض یک گزاره
ترکیب فصلی دو گزاره.
ترکیب عطفی دو گزاره.
ترکیب شرطی دو گزاره
ترکیب دو شرطیِ دو گزاره
سورها
نقیض گزاره های سوری

درس ۲
مجموعه و زیر مجموعه

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه
افراز یک مجموعه
تعریف زیر مجموعه به کمک نماد های ریاضی.
روش عضوگیری دلخواه
دو مجموعه مساوی
قوانین و اعمال بین مجموعه ها
قوانین دمورگان
ضرب دکارتی بین دو مجموعه.

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

استدلال

یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات استدلال) و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل می شود.

مثال ۱: اعداد اول بزرگ تر از یک فرد هستند.

a عدد اول بزرگ تر از یک است.

نتیجه: a عدد فرد است.

مثال ۲: تیم ملی فوتبال ایران، با تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی می رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می رود.

🛠تمرین ۱) نتیجهٔ استدلال های زیر را مشخص کنید.

۱- هیچ عدد مرکّبی، عددی اوّل نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه: ....

۲- اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش بینی شده است.

نتیجه: ....

گزاره:

یک جمله خبری که می تواند دارای ارزش درست (T) یا نادرست (F) باشد را گزاره می نامند. گزاره ها را معمولاً با نماد p ، q یا r ... . نمایش می دهند.

مثال: جمله «هوا خوب است» یا «حافظ بهترین شاعر است» گزاره نیستند زیرا اولی خبری نیست و دومی دارای ارزش مشخص درست یا نادرست نیست.

یک گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد؛ یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. برای مثال، گزارهٔ زیر یک حدس در ریاضیات است.

مثال) «هر عدد زوج بزرگ تر از ۲ را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اوّل نوشت» ؛

$$۴ = ۲ + ۲ ؛ ۶ = ۳ + ۳ ؛ ۸ = ۳ + ۵ ؛ ۱۰ = ۵ + ۵ ؛ ۱۲ = ۵ + ۷ ؛ ...$$

این حدس تا کنون اثبات نشده است؛ از طرفی هم برای آن مثال نقضی یافت نشده است. در هر صورت، این گزاره فقط یک ارزش دارد. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس، نادرست است.

جمله های پرسشی، امری و عاطفی (نشان دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی کنند، جمله های زیر هیچ خبری را بیان نمی کنند ؛ بنابراین گزاره محسوب نمی شوند.

🛠تمرین ۲) از بین جمله های زیر، گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

۱. چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)

۲. لطفاً در کلاس را ببندید. (امری)

۳. اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

۴. ایران کشور آسیایی است.

۵. در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

۶. ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

۷. آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟

۸. هر عدد فرد بزرگ تر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت.

۹. هر معادله درجه دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

۱۰. صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

گزاره نما:

اگر جمله خبری دارای متغیر باشد که با جایگذاری عدد به جای متغیر به گزاره تبدیل شود آن را گزاره نما می گویند.
مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها گزاره نما به گزاره تبدیل می شود را دامنه گزاره نما می گویند و با D نمایش می دهند و زیر مجموعه ای از دامنه که به ازای آن ها گزاره درست ایجاد می شود را مجموعه جواب گزاره نما می گویند و با S نمایش می دهند $(S \subseteq D)$ گزاره نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و .... می نامیم.

مثال: جمله «p عددی فرد است» یک گزاره نما است. دامنه آن تمام اعداد طبیعی و مجموعه جواب آن تمام اعداد اول است.

تمرین ۳) مجموعه جواب گزاره $\{x \in R | x^۲ - ۴x = ۰\}$ را بیابید.

تمرین ۴) دامنهٔ متغیر گزاره نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D = \mathbb{Z})$

ب) $۱۵x^۲ - ۷x - ۸ = ۰$ $(D = \mathbb{R})$

پ) تاس را پرتاب می کنیم و $P(\{x\}) = \frac{۱}{۶}$ ، $(D = \{۱, ۲, \ldots \ldots, ۶\})$

نقیض گزاره:

اگر p یک گزاره باشد نقیض آن، گزاره ای است که ارزش آن درست عکس ارزش p باشد.
نقیض گزاره p با $\sim p$ نمایش داده می شود.
مثال: نقیض گزارهٔ «۲ عددی گنگ است» را می توان به صورت های زیر نوشت.
«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد»، یا «۲ عددی گنگ نیست. »

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال: نقیض گزاره «اعداد صحیح گویا هستند» گزاره «اعداد صحیح گویا نیستند» می باشد.

هم ارزی دو گزاره

اگر دو گزاره هم ارزش باشند می گوییم هم ارز منطقی هستند مثل p و $\sim(\sim p)$ و می نویسیم $\sim(\sim p) \equiv p$
در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند می نویسیم: $p \equiv q$ و می خوانیم: p هم ارز است با: q .

تمرین ۵: جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب فصلی:

اگر بین دو گزاره حرف ربط «یا» باشد، ترکیب فصلی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \vee q$ نمایش داده می شود و علامت $(\vee)$ را رابط فاصل می گویند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ارزش یك ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی a و b زمانی حاصل ضرب صفر است که a یا b صفر باشد.

$$a, b \in R \quad ; \quad a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

مثال:

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید، یا مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید».

«$\sqrt{3}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اوّل نیست»

از ویژگی مثال قبل، برای حلّ معادله ها استفاده می کنیم:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x+7) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x + 7 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -7$$

ترکیب عطفی:

اگر بین دو گزاره حرف ربط «و» باشد، ترکیب عطفی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می شود و علامت «$\wedge$» را رابط عاطف می گویند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ارزش یك ترکیب عطفی زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشد.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b زمانی حاصل جمع صفر است که a و b هر دو صفر باشند.

$$a, b \in R, a, b > 0 \quad ; \quad a + b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

مثال: «سوگند فارغ التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است» .

🛠تمرین ۶) جدول زیر را کامل کنید.

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد	ماه شهریور ۳۱ روز دارد				
....	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن			
۲ عددی اوّل است	....		ن		
....	....	ن	ن		
(۷-) اوّل است	....			د	

🛠 تمرین۷: فرض کنید محمد به دانشگاه می رود (p) و رضا مکانیک (q) است. ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف) محمد به دانشگاه می رود یا رضا مکانیک است.

ب) محمد به دانشگاه نمی رود و رضا مکانیک است.

ج) محمد به دانشگاه نمی رود یا رضا مکانیک نیست.

د) محمد به دانشگاه نمی رود و رضا مکانیک نیست.

ه) $p \wedge \sim q$

قوانین دمورگان:

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

🛠تمرین ۸) به کمک جدول های زیر درستی قوانین دمورگان را نشان دهید.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

🛠تمرین ۹) مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم: $(۲x - y)^۲ + (x - ۱)^۲ = ۰$

حل: چون $(x - ۱)^۲ \geq ۰$ و $(۲x - y)^۲ \geq ۰$ بنابراین، تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$[(۲x - y)^۲ = ۰] \wedge [(x - ۱)^۲] = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۰ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases} \Rightarrow y = ۲$$

ترکیب دو شرطی:

اگر p و q دو گزاره ساده باشند ترکیب «اگر p آنگاه q» یک ترکیب شرطی است و به صورت «$p \Rightarrow q$» نوشته می شود که p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می گویند.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش یك ترکیب شرطی زمانی نادرست است که فرض درست ولی حکم نادرست باشد.

گزارهٔ مرکب«$p \Rightarrow q$» را به صورت های «p شرط کافی برای q است» **و** «q شرط لازم برای p است» **و** «p اگر و تنها اگر q» **می خوانند.**

(البته به صورت «p شرط لازم و کافی برای q است» **نیز می خوانند)**

برای درک بهتر به این مثال توجه کنید:

فردا دربی هستش و دوستت میگه اگه تو بری استادیوم منم میام. حالا بگو تو کدوم حالت دوستت زده زیر حرفش:

الف) تو میری اونم میره. ب) تو میری اون نمیره. ج) تو نمیری اونم میره. د) تو نمیری اون میره.

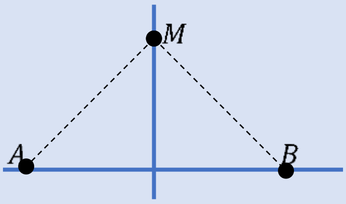
مثال: گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره هاست.

الف) ۶ عدد اوّل است $\Leftrightarrow$ $۲ > ۵$

ب) ۹۹ عدد اوّل نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویاست.

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه ای واقع بر عمود منصف یک پاره خط باشد، آن است که فاصلهٔ آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشد.



$$\left[M \in d(AB \text{عمود منصف پاره خط})\right] \Leftrightarrow MA = MB$$

🛠تمرین ۱۰) ترکیب «اگر ۲ فرد باشد، آنگاه ۵ > ۲ است» به انتفای مقدم .... است.

🛠تمرین ۱۱) به کمک جدول زیر نشان دهید $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$

🛠تمرین ۱۲) بدون کمک جدول ارزش ها را نشان دهید.

الف) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

🛠تمرین ۱۳) ترکیب $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض $p \Rightarrow q$ می گویند نشان دهید : $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$

گزاره هایی نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p \vee \sim p)$ را گزاره هایی همیشه درست و گزاره هایی نظیر $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می نامیم.

🛠تمرین ۱۴) با استفاده از جدول ارزش گزاره ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید:

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ **ب)** $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

(الف)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(ب)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

تمرین ۱۵) ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن گاه a عددی فرد است.

حل: به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده تر است).

($a^۲$ عددی زوج است $\Rightarrow$ a عددی زوج است) $\equiv$ (a عددی فرد است $\Rightarrow$ $a^۲$ عددی فرد است.)

اگر a عددی زوج باشد، یعنی $a = ۲K$، خواهیم داشت:

$$a^۲ = (۲K)^۲ = ۴K^۲ = ۲\underbrace{(۲K^۲)}_{k' \in Z'} = ۲k'$$

در نتیجه $a^۲$ عددی زوج است.

✠تمرین ۱۷) با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p \Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

بنابراین با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ جدول ارزش گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

(قوانین هم ارزی های منطقی)

الف) قوانین جابجایی

$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$p \vee q \equiv q \vee p$

ب) قوانین شرکت پذیری

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ج) قوانین توزیع پذیری

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

د) قوانین دمورگان

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

ه) قوانین جذب

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

و) قانون تبدیل گزاره شرطی به فصلی

$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

سور ها:

به عبارت های «به ازای هر- به ازای جمیع مقادیر» و «وجود دارد- به ازای برخی مقادیر» سور گفته می شود که اولی سور عمومی و دومی سور وجودی نام دارد و به اختصار سور عمومی را با علامت $\forall$ و سور وجودی را با علامت $\exists$ نمایش می دهند. این عبارت ها می توانند قبل از گزاره نماها آمده و گزاره های درست یا نادرست بسازند.

(مجموعه اعداد زوج را با E و اعداد فرد را با O و اعداد اول را با P نمایش می دهیم)

مهم ۱: گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مهم ۲: گزاره نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد.

تمرین ۱۸) در گزاره های زیر از $\exists$ و در کدام از $\forall$ استفاده می شود؟

«همهٔ دانش آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده اند». «هر گردویی گرد است» . «هر مستطیلی یک مربع است» . «هر مثلث متساوی الاضلاعی یک مثلث متساوی الساقین است». «بعضی از تیم های دستهٔ یک به دستهٔ برتر صعود می کنند» . «بعضی از اعداد اوّل، زوج اند» . «بعضی از ذوزنقه ها، مستطیل اند».

تمرین ۱۹) جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in R ; x^2 \geq 0$
	$\forall a \in E ; a = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
	$\exists p \in P ; p = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

تمرین ۲۰) ارزش گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq x$، را تعیین کنید : *نادرست است؛ زیرا $x = \frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می شود.*

تمرین ۲۱) کدام یک از عبارت های زیر، گزاره ای درست است؟

الف) $\forall x \in \mathbb{Z} ; x(x+1) = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$

ب) $\forall x \in R ; \tan x \times \cot x = 1$

حل الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است. بنابراین، برای هر عضو از دامنهٔ متغیر $(\mathbb{Z})$ گزاره نما به گزاره ای درست تبدیل می شود، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است؛ زیرا $x = \frac{\pi}{2}$، گزاره نما را به گزاره ای نادرست تبدیل می کند.

تمرین ۲۲) ارزش گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{Z} ; |x| - 1 < 0$ را تعیین کنید .

درست است؛ زیرا حداقل یک عضو $x = 0$ وجود دارد که به ازای آن، گزاره نما به گزاره ای با ارزش درست تبدیل می شود.

تمرین ۲۳) کدام یک از عبارت های زیر درست اند:

الف) $\exists x \in P ; x = 2k$ **ب)** $\exists x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 = 0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اوّل و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره نما $\{2\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعهٔ جواب گزاره نما مجموعهٔ تهی است.

🛠تمرین ۲۴) درستی یا نادرستی گزاره های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اوّل، فرد است.

ب) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

پ) $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

ت) هر عدد زوج، غیر اوّل است.

ث) در آمار، هر متغیّر ترتیبی یک متغیّر کیفی است.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه ی فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونهٔ S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$.

ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است.

🛠تمرین ۲۵) گزاره های زیر را به کمک نماد های $\forall$ و $\exists$ بنویسید.

الف) به ازای هر عدد طبیعی n، $2n$ زوج است.

ب) عددی صحیح وجود دارد که مربع آن به علاوه یک برابر صفر است.

ج) به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر، حاصل ضرب آن عدد در معکوسش برابر یک است.

د) به ازای برخی مقادیر حقیقی داریم: $x^2 = 8x$

🛠تمرین ۲۶) عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد $\forall$ و $\exists$ بنویسید.

الف) $\exists x \in R; x^2 + 1 = 0$

ب) $\forall a \in E; a = 2k$ ، $k \in O$

ج) $\forall p \in P; p = 2k + 1$ ، $k \in Z$

د) $\exists b \in Z; b(b+1) = 2k$ ، $k \in Z$

🛠تمرین ۲۷) کدام گزاره ها درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید.

الف) $\forall x \in R; \ |x| > 1$

ب) $\exists x \in R; x^2 < x$

ج) $\exists x \in Z; 2x + 1 = 2$

د) $\forall x \in N; \frac{4n+6}{2} \in O$

نقیض گزاره های سوری:

برای نوشتن نقیض یک گزاره سوری فقط منفی کردن فعل جمله کافی نیست به مثال زیر دقت کنید.

هر آسیایی ایرانی است (نادرست) هر آسیایی ایرانی نیست (نادرست)

پس دو گزاره بالا که هم ارزش هستند نمی توانند نقیض هم باشند، ولی به گزاره های زیر دقت کنید:

هر آسیایی ایرانی است (نادرست) بعضی از آسیایی ها ایرانی نیستند (درست)

دو گزاره فوق نقیض هم هستند پس برای نقیض یک گزاره سوری باید هم سور و هم گزاره بعد آن نقیض شود.

توجه: نقیض سور عمومی، سور وجودی است و برعکس.

$$\sim\big(\exists x ; p(x)\big) \equiv \forall x ; \sim p(x) \qquad \sim\big(\forall x ; p(x)\big) \equiv \exists x ; \sim p(x)$$

🛠 تمرین ۲۸) ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید

الف) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0$ **ب)** $\exists y \in \mathbb{R} ; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است؛ چون $x = 0$، مثال نقض برای آن است.

$$\sim\big(\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0\big) \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; x^2 \not> 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq 0$$

ب) درست است؛ زیرا $y = -1$ در آن صدق می کند، پس مجموعهٔ جواب آن ناتهی است.

$$\sim\big(\exists y \in \mathbb{R} ; y < 0 \wedge y^2 \leq 1\big) \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; \sim(y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in R ; y \geq 0 \vee y^2 > 1$$

🛠 تمرین ۲۹) ارزش گزاره های زیر را تعیین کرده سپس نقیض آنها را بنویسید.

الف) هر عدد فردی اول است.

ب) $\forall x \in R ; x + \frac{1}{x} \geq 2$

ج) عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن منفی است.

د) $\exists x \in R ; x + 2 = 3$

تمرینات جمع بندی درس اول

۱. از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.

پ) $۳ + ۵ > ۶$ ت) تخته سیاه را پاک کنید.

ث) $\{۱\} \in \{۱,۲,۳,۴\}$ ج) چه باران شدیدی می آید.

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اوّل است. ح) $\emptyset \not\subset \mathbb{R}$

خ) $\sqrt{۲} \in \mathbb{Z}$ د) عدد $۸ + ۵^{۹}$ عددی اوّل است.

ذ) به امید کامیابی شما. ر) آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۲. درجاهای خالی عدد با علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷ \times \square = -۷$ ب) $۵ + \square \notin \mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸\times\square}{۴} \in \left\{۲,\frac{۱}{۳}\right\}$ ت) $۳ \times 5 \square \frac{۱۰\times۹}{۳}$

ث) $\square \times \sqrt{۲} = ۰$ ج) $۱\square\{۱\}$

چ) $۵(\square - ۳) = ۲۰$ ح) $۷(\square - ۳) = ۳۵$

۳. دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره نماهای زیر، مجموعهٔ اعدادصحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است.

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

پ) $\frac{۲x+۱}{۳} \leq -۱$

ت) $\{n(n+۱) = ۰ | n \in W\}$

۴. نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $۳ \leq ۴$

ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی دان ایرانی است.

پ) $a \in \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ث) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

ج) اگر ۳ زوج باشد، آن گاه ۲ فرد است.

۵. ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۱۰ = ۳ + ۴) \wedge (۳ < ۲)$

ب) $(۰ = ۱ + ۲^{(۱-)}) \vee (۳ < ۵)$

پ) $(\{۲،۳،۴\} \in ۱) \vee \left(\frac{۳}{۶} \neq \frac{۱}{۲}\right)$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) در لوزی مفروض دو قطر با هم برابرند.

ج) ۲ عدد اوّل نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

چ) $۳- < ۲- \Leftrightarrow ۳ < ۲$

ح) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس.

۶. جدول زیر را کامل کنید.

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.					د
	$۱ \nless ۲$			ن	
$۲ \in \{۱،۲\}$					ن
	عدد ۷ اوّل است			د	

۷. جدول ارزش های هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

ب) $\sim p \wedge p$

پ) $\sim p \vee p$

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

۸. با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که:

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

ب) $p \vee F \equiv p$

پ) $p \wedge T \equiv p$

ت) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

ج) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

چ) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

ح) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

۹- ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰. گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall, \exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^۲ < ۰$.

پ) همهٔ اعداد اوّل فردانd.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $۲x - ۱ > ۵$.

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x = x^۳$.

۱۱. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} | ۰ < x \leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A ; x + ۴ = ۱۰$

ب) $\forall x \in A ; x + ۲ \leq ۹$

پ) $\exists x \in A ; x + ۳ \leq ۴$

ت) $\forall x \in A ; x + ۱ \geq ۶$

۱۲. ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = x + ۱$

ب) $\forall n \in \mathbb{N} ; (۲^n + ۱) \in P$

پ) $\forall x \in (-\infty, ۰) : x - \frac{۱}{x} \leq -۲$

ت) $\exists y \in \mathbb{R} ; \frac{y - ۳}{۵} = ۰$

درس۲ـ مجموعه ـ زیر مجموعه

یاد آوری از مجموعه ها:

با حل تمرین های زیر به مرور اعمال روی مجموعه ها می پردازیم.

$\cap$	$\cup$	$\subseteq$	$\in$	$\notin$	$\nsubseteq$	A'
اشتراک	اجتماع	زیرمجموعه	عضو	عضونبودن	زیر مجموعه نبودن	متمم مجموعه A

تمرین ۱) فرض کنید $A = \{a, b\}$، **درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.**

الف) $\{a\} \in A$ **ب)** $\emptyset \in A$ **پ)** $\{a\} \subseteq A$

ت) $b \subseteq A$ **ث)** $a \in A$ **ج)** $\{a, b\} \subseteq A$

تمرین ۲) کدام یک از مجموعه های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی اند؟

الف) $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| x^۲ = ۹ \text{ و } ۲x = ۴\right\}$ **ب)** $\{x \in \mathbb{Z} | x + ۸ = ۸\}$

پ) $\{x \in \mathbb{Z} | x \neq x\}$ **ت)** $\{x \in \mathbb{N} | x^۲ = ۷x\}$

تمرین ۳) مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$A = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq ۲\}$

$B = \{m \in \mathbb{Z} | m^۳ = m\}$

$C = \{k \in \mathbb{R} | k^۲ - ۱ = ۰\}$

$D = \left\{a \in S \middle| S \text{ فضای نمونه پرتاب یک تاس است} \right\}$

تمرین ۴) با توجه به مجموعه ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$A \cap D \subseteq C$ $B \subseteq A$ $B \in A$

$B - D \subseteq A$ $C \nsubseteq A$ $B \subseteq C \cup A$

تمرین ۵) اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ **و** $B = \{۲,۴,۶\}$ **و** $C = \{۲,۳,۵\}$ **باشد مجموعه های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.**

الف) $A \cap B =$ **ب)** $B \cup C =$

ج) $A - C =$ **د)** $A - (B \cup C) =$

تمرین ۶) تمام زیر مجموعه های مجموعه ی $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ **را بنویسید.**

مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می شود و آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم. اگر A، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$، 2^n عضو دارد.

اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$، آن گاه A زیر مجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می شود.

تمرین ۷) به کمک اصل ضرب نشان دهید تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی، 2^n است.

تمرین ۸) مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل: فرض کنیم A، n عضو داشته باشد، پس دارای 2^n زیر مجموعه است؛ اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیر مجموعه های A، ۴۸ واحد افزایش می یابد؛ یعنی در این حالت، تعداد زیر مجموعه های این مجموعه برابر $2^n + 48$ است. از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می شود، تعداد زیر مجموعه های مجموعه جدید، برابر است با 2^{n+2} . بنابراین داریم:

$$2^n + 48 = 2^{n+2} = 2^n \times 2^2$$

$$\Longrightarrow 2^n + 48 = 4 \times 2^n \Longrightarrow 4 \times 2^n - 2^n = 48$$

$$\Longrightarrow 3 \times 2^n = 48 \Longrightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Longrightarrow n = 4$$

در نتیجه مجموعهٔ A، چهار عضوی است.

تمرین ۹) اگر به یک مجموعه ۲ عضو اضافه کنیم به تعداد زیر مجموعه های آن ۹۶ واحد اضافه می شود. این مجموعه چند عضو دارد؟

تمرین ۱۰) اگر تعداد اعضای یک مجموعه را دو برابر کنیم تعداد زیر مجموعه های آن ۱۶ برابر می شود. تعداد اعضای اولیه این مجموعه چقدر بوده است؟

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیر مجموعهٔ B نامیده و می نویسند $A \subseteq B$.
اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد، در این صورت A زیر مجموعه B نیست و می نویسند $A \nsubseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می توان تعریف های $A \subseteq B$ و $A \nsubseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

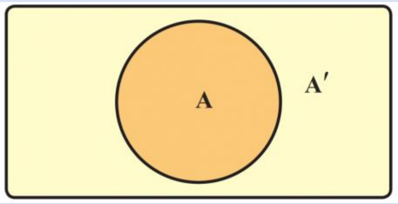
$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

اثبات برخی ویژگی ها با روش عضوگیری

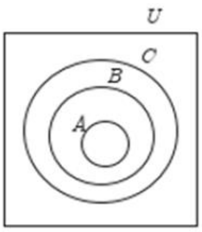
قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می کنیم. فرض کنیم A مجموعه ای با مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشند و آن را با A' نمایش می دهند.

$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می گیریم که اگر $x \in A$ آن گاه $x \notin A'$ یا اگر $x \in A'$ آن گاه $x \notin A$.



ویژگی ۱- فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید $A \subseteq C$.



اثبات: برای اثبات $A \subseteq C$، باید ثابت کنیم که: $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$

برای این منظور از فرض ها یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ استفاده می کنیم.

$$\forall x; \ x \in A \overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} x \in B \overset{B\subseteq C}{\Longrightarrow} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

ویژگی ۲- فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$، ثابت کنید $B' \subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم های مجموعه های A و B هستند).

اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x; \left(x \in B' \Rightarrow x \notin B \overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A'\right)$$

درنتیجه داریم: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$

ویژگی ۳- برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید: $\emptyset \subseteq A$.

اثبات: برای اثبات $\emptyset \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است. چون در این گزار شرطی، ارزش مقدّم یعنی $x \in \emptyset$ نادرست است. پس به انتفای مقدّم ارزش گزار شرطی درست است و در نتیجه $\emptyset \subseteq A$.

تمرین ۱۳) برای مجموعه های A و B با مجموعه مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$.

تمرین ۱۴) فرض کنیم A **و** B **و** C **و** D **چهار مجموعه با مرجع** U **باشند، ثابت کنید: اگر** $A \subseteq B$ **و** $C \subseteq D$ **آن گاه** $A \cup C \subseteq B \cup D$.

تمرین ۱۵) فرض کنیم A **و** B **و** C **سه مجموعه با مرجع** U **باشند، ثابت کنید: اگر** $A \subseteq C$ **و** $B \subseteq C$ **آن گاه** $(A \cup B) \subseteq C$.

تمرین ۱۶) برای هر مجموعه دلخواه A **ثابت کنید** $\emptyset \subseteq A$.

راهنمایی: با نماد ریاضی آن چیزی که باید اثبات شود را بنویسید. ارزش این گزاره چیست؟ چرا؟

دو مجموعه مساوی:

دو مجموعه A و B را مساوی می گویند هر گاه هر عضو یکی از آنها عضو دیگری نیز باشد، به عبارت دیگر $A \subseteq B$ ، $B \subseteq A$ و به صورت ریاضی می توان نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

تمرین ۱۷) فرض کنید $A = \{۱,۲\}$**، کدام یک از مجموعه های زیر با** A **مساوی است؟ (با ذکر دلیل)**

الف) $\{x \in \mathbb{Q} | x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\}$ **ب)** $\{x \in \mathbb{R} | ۱ \le x \le ۲\}$

پ) $\{x \in \mathbb{Q} | ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰\}$ **ت)** $\{x \in \mathbb{N} | ۱ \le x \le ۲\}$

تمرین ۱۸) کدام دو مجموعه با هم مساوی هستند؟

الف) $A = \{x \in Z | ۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰\}$

ب) $B = \{x \in R | (x - ۱)(x^۲ + ۲) = ۰\}$

ج) $C = \{x \in N | |x| \le ۱\}$

تمرین ۱۹) فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: $A \cap B = B \cap A$. (خاصیت جابه جایی اشتراک).

اثبات: برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم:

$$A \cap B \subseteq B \cap A \quad (۱) \quad ; \quad B \cap A \subseteq A \cap B \quad (۲)$$

اثبات (۱) : (طبق خاصیت جابه جایی $\wedge$)

$$\forall x: [x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in B \cap A]$$

به روش مشابه می توان درستی رابطهٔ (۲) را نشان داد.

تمرین ۲۰) فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آن گاه $A - B = \emptyset$.

اثبات: $\left(زیرا\ A \subseteq B\right)$ $\quad A - B = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U | x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset$

$$\Rightarrow A - B = \emptyset$$

جبر مجموعه ها

قوانین مجموعه ها

مشابه قوانین گزاره های مرکب برای اعمال بین مجموعه ها نیز قوانینی وجود دارد که همگی به راحتی به کمک هم ارزی های منطقی گزاره های مرکب قابل اثبات هستند.

قوانین اعمال بین مجموعه ها:

الف) قوانین جابه جایی

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

ب) قوانین شرکت پذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ج) قوانین توزیع پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

د) قوانین جذب

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

ه)

$$A - B = A \cap B'$$

و) قوانین دمورگان

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

تذکر: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه های مرجع و تهی تساوی های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$ ۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$ ۴) $A \cap U = A$

۱. ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم: $A \cup B = B \cup A$

$A \cup B = \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$ تعریف اجتماع

$= \{x \in U | x \in B \vee x \in A\}$ جابه جایی «$\vee$»

$= B \cup A$ تعریف اجتماع

۲. ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه C, B, A از مجموعهٔ مرجع U، داریم: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cup (B \cup C) = \{x \in U | x \in A \vee x \in (B \cup C)\}$ تعریف اجتماع
$= \{x \in U | x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\}$ تعریف اجتماع
$= \{x \in U | (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$ شرکت پذیری «$\vee$»
$= \{x \in U | x \in (A \cup B) \vee x \in C\}$ تعریف اجتماع
$= (A \cup B) \cup C$ تعریف اجتماع

۳. با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع پذیری «$\cup$» نسبت به «$\cap$» را ثابت کنید.
یعنی ثابت کنید: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\forall x$ ؛ $[$فرض کنیم $x \in [A \cup (B \cap C)]]$
$\Rightarrow [x \in A \vee (x \in (B \cap C))]$ تعریف اجتماع
$\Rightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)]$ تعریف اشتراک
$\Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)]$ توزیع پذیری «$\vee$» نسبت به «$\wedge$»
$\Rightarrow [x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)]$ تعریف «$\cup$»
$\Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$ تعریف اشتراک
$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

و به همین ترتیب ثابت می شود $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند.

(توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از «$A \cup$» است.)

۴. با استفاده از خواص فوق ثابت کنید: (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است.)

ت)	پ)	ب)	الف)
$A - B = A \cap B'$	$A \cup (B \cup A') = U$	$(C \cap A) \cup (A' \cap C) = C$	$(A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$
تعریف متمم $A - B =$ $\{x \in U \| x \in A \wedge x \notin B\} =$ $\{x \in U \| x \in A \wedge x \in B'\}$ تعریف اشتراک $= A \cap B'$	جابه جایی $= A \cup (A' \cup B)$ شرکت پذیری $= (A \cup A') \cup B = U \cup B = U$	جابه جایی $= (C \cap A) \cup (C \cap A')$ توزیع پذیری $= C \cap (A \cup A') = C \cap U = C$	جابه جایی $= (A \cup B) \cap (A \cup B')$ خاصیت توزیع پذیری (به اصطلاح فاکتورگیری) $= A \cup (B \cap B')$ $= A \cup \emptyset$ $= A$

قضیه: برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U، داریم:

الف) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ب) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم: $A \subseteq B$ و ثابت می کنیم: $A \cup B = B$ برای این منظور باید ثابت کنیم: $(A \cup B) \subseteq B$ و $B \subseteq (A \cup B)$، رابطهٔ $B \subseteq (A \cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین، به اثبات رابطهٔ $B \subseteq (A \cup B)$ می پردازیم:
می دانیم $B \subseteq B$:

(۲) $\Rightarrow (A \cup B) \subseteq (B \cup B) \Rightarrow (A \cup B) \subseteq B$

طبق فرض $A \subseteq B$:

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A \cup B = B$ اثبات شده و حکم به دست می آید.)

(۱) و (۲) $\Rightarrow (A \cup B) = B$

حال فرض کنیم: $A \cup B = B$، ثابت می کنیم $A \subseteq B$؛

$A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow{\text{فرض}: A\cup B=B} A \subseteq B$: با توجه به تعریف اجتماع می دانیم

ب) ابتدا فرض کنیم $A \subseteq B$، تساوی $A \cap B = A$ را اثبات می کنیم:

: با توجه به تعریف اشتراک داریم $(A \cap B) \subseteq A$ (۱)

$$\begin{cases} A \subseteq A : \text{می دانیم} \\ A \subseteq B : \text{طبق فرض} \end{cases} \Rightarrow (A \cap A) \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B)$$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A \cap B = A$ به دست می آید.)

$(۱) \text{ و } (۲) \Longrightarrow (A \cap B) = A$

حال فرض می کنیم: $A \cap B = A$، ثابت می کنیم $A \subseteq B$؛

$(A \cap B) \subseteq B \xrightarrow{\text{فرض}: A\cap B=A} A \subseteq B$: با توجه به تعریف اشتراک می دانیم

(قوانین جذب یا همپوشانی) :

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند، می خواهیم تساوی های زیر را که به قوانین جذب معروف اند، با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

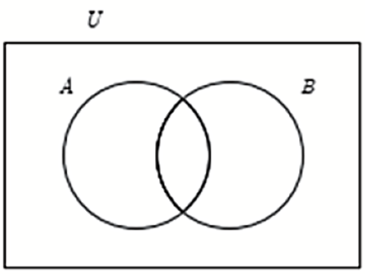
ب) $A \cap (A \cup B) = A$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C \subseteq D$ در این صورت $(C \cup D) = D$ و $(C \cap D) = C$ است.

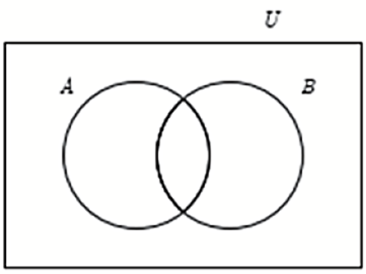
طبق تعریف اشتراک می دانیم (اثبات الف : $(A \cap B) \subseteq A \overset{\text{قضیه}}{\Longrightarrow} A \cup (A \cap B) = A$

طبق تعریف اجتماع می دانیم (اثبات ب : $A \subseteq (A \cup B) \overset{\text{قضیه}}{\Longrightarrow} A \cap (A \cup B) = A$

۵. با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:



$A \cup (A \cap B)$



$A \cap (A \cup B)$

۶. روش دیگری برای اثبات قوانین جذب بنویسید.

الف) $A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) == A \cap U = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A$

۷. عبارت های زیر را ساده کنید:

الف) $(A \cap B) \cup \big((B \cup C) \cap [(B \cup A) \cap B]\big)$

ب) $(A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)]$

۸. درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $A - B = B' - A'$

ب) $(X \subseteq A) \wedge (X \subseteq A') \Longrightarrow X = \emptyset$

پ) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

ت) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ث) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

قوانین دمورگان

تساوی های زیر را که به قوانین دمورگان معروف اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند:

$$\begin{cases} \text{الف)}\ (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ \text{ب)}\ (A \cap B)' = (A' \cup B') \end{cases}$$

۹. با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ را اثبات کنید.

(باید ثابت کنید. $(A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')$ و $((A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'$)

$\forall x$ ؛ $[x \in (A \cup B)' \Longrightarrow x \notin (A \cup B) \Longrightarrow x \notin A \wedge x \notin B] \Longrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Longrightarrow x \in (A' \cap B') \Longrightarrow (A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')$

۱۰. با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه ها) درستی تساوی های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A-B)' = (A' \cup B)$ **ب)** $(A-B)-C = (A-C)-B$ **پ)** $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

۱۱. با استفاده از جبر مجموعه ها درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

ب) $A \cap (B-C) = (A \cap B)-(A \cap C)$

پ) $A-(B-C) = (A-B)-C$

ت) اگر $(A \cup B) = (A \cap B)$ آنگاه $A = B$

۱۲. اگر $A = \{$۱۰ و ... و ۲ و ۱$\}$ و $B = \{$۱۵ و ... و ۶ و ۵$\}$ و $U = \{$۲۰ و ... و ۲ و ۱$\}$ حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

ب) $(A - B) \cup \big((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A']\big)$

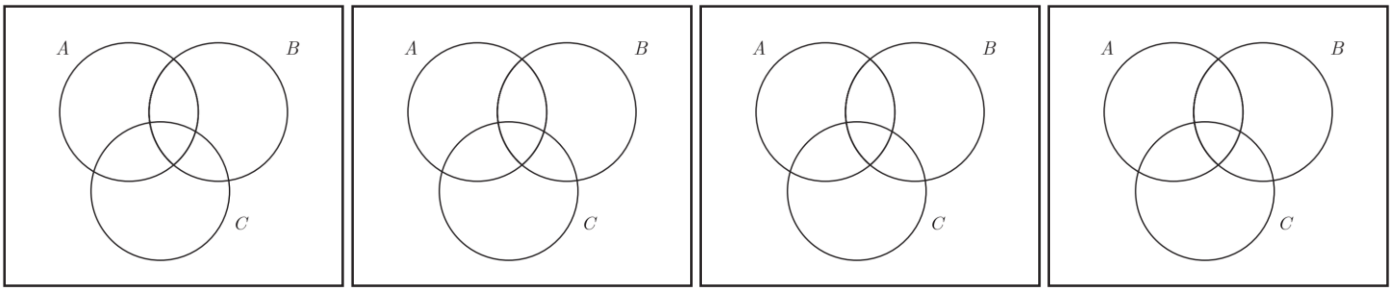
۱۳. با توجه به نمودار ون که در روبه رو رسم شده است، مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده ایم، هاشور بزنید.

الف) اعضایی که فقط در A باشند.

ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه اند.

پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.

ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.



ضرب دکارتی بین دو مجموعه:

ضرب دکارتی بین دو مجموعه A و B مجموعه ای را ایجاد می کند که اعضای آن زوج مرتب هایی هستند که از اعضای A و B ساخته شده اند:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

در این تعریف همیشه مولفه اول زوج های مرتب مربوط به مجموعه اول (A) و مولفه دوم زوج های مرتب مربوط به مجموعه دوم (B) هستند.

مثال. اگر $A = \{۱,۲\}, B = \{۳,۴,۵\}$ آنگاه داریم:

$A \times B = \{(۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۲,۳), (۲,۴), (۲,۵)\}$
$B \times A = \{(۳,۱), (۳,۲), (۴,۱), (۴,۲), (۵,۱), (۵,۲)\}$

پس

الف) $A \times B \neq B \times A$.

ب) اگر تعداد اعضای دو مجموعه m و n تا باشد، تعداد اعضای مجموعه حاصل از ضرب دکارتی mn خواهد بود.

۱۵. در مثال قبل نمودار مختصاتی مجموعه های $A \times B, B \times A$ را رسم کنید.

۱۶. اگر $A = [1,4)$, $B = \{-1,1\}$, $C = [2,3]$, $D = \mathbb{R}$ ضرب های دکارتی زیر را تعریف و رسم کنید.

الف) $A \times B =$ $\quad A \times B = \{(x,y) | x \in (1,4] \wedge y \in B\}$

ب) $B \times C =$ $\quad B \times A = \{(x,y) | (x = 1 \vee x = 2) \wedge 1 < y \leq 4\}$

۱۷. اگر فرض کنیم: $A = \mathbb{R}$ و $B = \{0,1,2\}$ نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

۱۸. در صورتی که $A = [1,4]$ و $B = [0,2]$ در این صورت، نمودار $(A \times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$A \times B = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$

۱۹. در صورتی که فرض کنیم : $A = \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{R}$ در این صورت، حاصل ضرب $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ را چگونه تعبیر می کنید؟

۲۰. اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت:

الف) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

ب) $A \times B = B \times A \Longrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می کنیم:

فرض کنیم: $A \times \emptyset \neq \emptyset$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x,y) در $A \times \emptyset$ باید وجود داشته باشد که در این صورت:

$$(x,y) \in A \times \emptyset \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in A \wedge \underbrace{y \in \emptyset}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y \in \emptyset$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\emptyset$ فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می باشد. به طریق مشابه ثابت کنید که $A \times \emptyset = \emptyset$.

اثبات ب) اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ که حکم اثبات می شود.

حال فرض کنیم: $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرض $A \times B = B \times A$، ثابت می کنیم $A = B$.

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x : x \in A \wedge \exists x \in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists (x,y) : (x,y) \in A \times B$$

$$\xrightarrow{A \times B = B \times A} (x,y) \in B \times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge y \in A \Longrightarrow A \subset B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$$

(x ای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و y ای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرینات جمع بندی درس دوم مجموعه ها

۱. مجموعه های زیر را که شامل شکل های هندسی در صفحه هستند، درنظر بگیرید:

$A = \{x|$ یک چهار ضلعی است $x\}$ ، $C = \{x|$ یک لوزی است $x\}$

$B = \{x|$ یک مستطیل است $x\}$ ، $D = \{x|$ یک مربع است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

الف) $D \subseteq C$ ب) $B \subseteq D$

پ) $A \subseteq B$ ت) $D \subseteq A$

۲. فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,...,۸,۹\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D = \{۳,۴,۵\}$ و $E = \{۳,۵\}$. در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید: X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. ب) $X \subseteq A$ ولی $X \nsubseteq C$

پ) $X \subseteq D$ ولی $X \nsubseteq B$ ت) $X \subseteq C$ ولی $X \nsubseteq A$

۳. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$ ب) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

پ) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$ ت) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\}$

۴. کدام یک از مجموعه های زیر با هم مساوی اند؟

$A = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, |m| < ۲\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^۳ = x\}$

$C = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y^۲ \leq ۲y\}$ $D = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m^۲ \leq ۱\}$

$E = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m^۳ + ۲m = ۳m^۲\}$

۵. مثال هایی از مجموعه های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم های زیر درست باشند.

الف) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \notin C$

ب) $A \in B$ و $B \in C$ و $A \in C$

پ) $A \in B$ و $A \subseteq B$

۶. اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعهٔ A چند زیر مجموعه دارد؟

۷. اگر $A = \{۲, x + ۲y, ۴\}$ و $B = \{۴,۵, x - y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۸. ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$.

۹. فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$ ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

۱۰. مجموعه های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه:

الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$ ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

۱۱. الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$. ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

۱۲. هر گاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

الف) $B - A = B$ ب) $B \subseteq A'$

۱۳. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$، کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای X محسوب می شود؟

الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$

پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$

۱. با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه جایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره ها، هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۲. درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۳. هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید:

الف) $(A' \cap B) \cup \big([(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)\big)$

ب) $(A \cup B) - B$

پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۴. درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\emptyset$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)]\Longrightarrow B=C$

۵. اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶. با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$