فصل ۸: بانک تست کنکور "حد و پیوستگی"

.1

$$x+1<3<2x-1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+1<3 \Rightarrow x<2 \\ 2x-1>3 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

.2

حاصل حد، وقتی $x \to 1$، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{-(2+\sqrt{5-x})}{1+\sqrt{x}} = \frac{-(2+2)}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2$$

.3

حاصل حد، وقتی $x \to -1$، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x} \times \frac{2x-\sqrt{3-x}}{2x-\sqrt{3-x}} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x)^2-(\sqrt{3-x})^2}{(x^2+x)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{4x^2-3+x}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})} = \lim_{x\to -1} \frac{4x-3}{x(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$= \frac{-4-3}{(-1)(-2-2)} = \frac{-7}{(-1)(-4)} = -\frac{7}{4}$$

.4

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 4} \frac{(3x+2)(x-4)}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x\to 4} \frac{(3x+2)(x-4)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{(2-\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-(3x+2)\cancel{(2-\sqrt{x})}(2+\sqrt{x})(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{\cancel{(2-\sqrt{x})}} = \lim_{x\to 4} \left(-(3x+2)(2+\sqrt{x})(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)\right)$$

$$= -14 \times 4 \times 2 = -112$$

راه‌حل دوم:

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 4} \frac{6x-10}{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}} = \frac{14}{\frac{-\frac{1}{2\times 2}}{2}} = -14 \times 8 = -112$$

.5

راه حل اول:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}} \times \frac{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+x)} = -\frac{3}{2}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} \overset{x=-1}{=} \frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

.6

روش اول:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+x+2}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}=\frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{4x^2-x^2-12}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(x-2)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)}=\frac{-(3)(8)}{3(4)}=-2$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ و هر دو در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه روش هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به‌قرارِ زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}\qquad H:\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$(x^2-x-2)'=(2x-1)\xrightarrow{x=2}=3>0\Rightarrow$$

تابع صعودی است پس وقتی $x\to 2^-$ آنگاه $x^2-x-2<0$ یعنی $|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$

ابتدا باید قدر مطلق را تعیین علامت کنیم و سپس هوپیتال بگیریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|(x+1)\cdot(x-2)|}{2x-\sqrt{x^2+12}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)\cdot(x-2)}{2x-\sqrt{x^2+12}}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+x+2}{2x-\sqrt{x^2+12}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+1}{2-\frac{x}{\sqrt{x^2+12}}}=\frac{-3}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-3}{\frac{3}{2}}=-2$$

.7

روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $\left((a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3\right)$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})}=\frac{-6}{6(\frac{1}{12})}=-12$$

.8

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}})}{(4-2-\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1)(4)(2+\sqrt{3-x})}{(2-\sqrt{3-x})(2+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1)(4)(4)}{(4-3+x)}=16$$

روش دوم: با استفاده از هوپیتال:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{4x+5}{-\frac{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}}=\frac{1}{\frac{\frac{1}{4}}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$$

.9

عبارت موجود در رادیکال مخرج را به‌صورت مربع کامل و عبارت موجود در صورت کسر را با کمک اتحاد چاق و لاغر تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\underbrace{|x-2|}_{+}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}\times\frac{(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}{(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}$$

$$\to\lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{(8-x-6)}^{-(x-2)}}{(x-2)(12)}=-\frac{1}{12}$$

.10

باتوجه‌به نمودار $f(0)=0$ است، پس داریم:

$$f(0)=0\Rightarrow\frac{0+b}{0-1}=0\Rightarrow -b=0\Rightarrow b=0$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x=1$ تعریف‌نشده است، چون $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x\to 1$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to 1}4x^3+ax+b=0\Rightarrow 4+a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین داریم: $(a,b)=(-4,0)$

.11

می‌دانیم $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})}=-1$$

.12

با عددگذاری به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و به کمک فرمول‌های مثلثاتی تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

می‌دانیم: $\boxed{۱+\sin ۲x=(\sin x+\cos x)^{۲}}$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^{۲}x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^{۲}}}=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{\frac{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x}}{|\sin x+\cos x|}$$

توجه: به‌ازای $\frac{۳\pi^-}{۴}$ حاصل عبارت $\sin x+\cos x$ همواره مثبت است چون در ناحیهٔ دوم هرچقدر زاویه کوچک‌تر می‌شود اندازهٔ سینوس و کسینوس مثبت‌تر و بزرگ‌تر می‌شود.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)\cdot\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cos^{۲}x\cdot\cancel{(\sin x+\cos x)}}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}}=-۲\sqrt{۲}$$

.13

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^{۲}\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^{۲}\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^{۲}\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱+\cos\pi x)(۱-\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۱-(-۱)=۲$$

.14

می‌دانیم: بنا به هم‌ارزی مثلثاتی:

$$\tan^{n}u\underset{u\to ۰}{\simeq}\lim_{u\to ۰}(u^{n})\ ,\ \lim_{u\to ۰}(۱-\cos u)\simeq\lim_{u\to ۰}\frac{u^{۲}}{۲}$$

$$(۱)\ \ ۱-\cos u\underset{u\to ۰}{\sim}\frac{u^{۲}}{۲}\underset{u\to ۰}{}\Rightarrow ۱-\cos(\sqrt{۲x})\underset{x\to ۰^+}{=}\frac{(\sqrt{۲x})^{۲}}{۲}=x$$

پس داریم: $(۲)\ \ tg^{۲}u\underset{u\to ۰}{\sim}\underset{u\to ۰}{u^{۲}}\Rightarrow tg^{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}-۱)\sim(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}-۱)^{۲}=(\frac{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}{\sqrt{۱-x^{۲}}})^{۲}$

$$\lim_{u\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}{\sqrt{۱-x^{۲}}})^{۲}}{x^{n}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}})^{۲}}{x^{n}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}(۱+\sqrt{۱-x^{۲}})})^{۲}}{x^{n}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^{۲}}{۲})^{۲}}{x^{n}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^{۴}}{۴x^{n}}=a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۴}\\ n=۴\end{cases}\Rightarrow a+n=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$$

.15

ابتدا عبارت داخل براکت را تعیین عدد می‌کنیم.

$$x \to (-\frac{1}{2})^- \Rightarrow x^2 \to (\frac{1}{4})^+ \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x^2} \to 12^- \\ \frac{2}{x^2} = 8^- \Rightarrow -\frac{2}{x^2} \to (-8)^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\frac{3}{x^2}] = 11 \\ [-\frac{2}{x^2}] = -8 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x + 8} = \frac{-5 - 5 + 11}{-8^- + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

.16

وقتی $x \to -\frac{1}{2}^+$ داریم:

$$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 4 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x^2} < -8 \Rightarrow [-\frac{2}{x^2}] = -9 \\ \frac{3}{x^2} > 12 \Rightarrow [\frac{3}{x^2}] = 12 \end{cases}$$

پس حد را می‌توان به صورت زیر بازنویسی و حل کرد:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \frac{-8 + 9}{(-12)^+ + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

.17

اگر $x \to 2^+$، حاصل $[x^3]$ دقیقاً برابر ۸ است و داریم:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{4}{4 + 4 + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

.18

راه‌حل اول: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x + 1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x + 1}}{2x + \sqrt{3x + 1}} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x - 7\sqrt{x} + 5)(2x + \sqrt{3x + 1})}{4x^2 - 3x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x + 1})}{(x - 1)(4x + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x + 1})}{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}(\sqrt{x} + 1)(4x + 1)}$$
$$= \frac{-3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{-12}{10} = -1/2$$

راه‌حل دوم: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x + 1}} = \frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \to 1} \frac{2 - \frac{7}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{6}{5} = -1/2$$

.19

روش اول:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(2+3x-2+x)(\sqrt{2})}{(\sqrt{1-\cos^2 x})(2\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x}{2|\sin x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-\sin x}=-2$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim\limits_{u\to 0}(1-\cos u)\sim\frac{u^2}{2}$ است.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{|x|}_{-}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1(3)}{2\sqrt{2+3x}}-\frac{1(-1)}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-2$$

.20

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(\frac{1}{2})=0$، بنابراین:

$$2(\frac{1}{2})^4+a(\frac{1}{2})^3+2(\frac{1}{2})^2-3(\frac{1}{2})=0\Rightarrow 2(\frac{1}{16})+a(\frac{1}{8})+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$$
$$\Rightarrow\frac{1}{8}+\frac{a}{8}-1=0\Rightarrow a=7$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$P(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x$$
$$\Rightarrow P(-2)=2(-2)^4+7(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)=32-56+8+6=-10$$

.21

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ برابر ۳ است، پس $p(4)=3$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر ۱ است، پس $p(-2)=1$.

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x=2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^2)+4p(-x)=p(2^2)+4p(-2)$$
$$=p(4)+4p(-2)=3+4\times 1=7$$

.22

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(1)=8$ و $P(-\frac{1}{2})=5$ است. همچنین داریم:

$$P(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+R(x)=((x-1)(2x+1))Q(x)+R(x)\quad ;R(x)=ax+b$$

بنابراین:

$$P(1)=R(1)=a+b=8$$
$$P(-\frac{1}{2})=R(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}a+b=5$$
$$\begin{cases}a+b=8\\-\frac{1}{2}a+b=5\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{2}a=3\Rightarrow a=2\ ,\ b=8-2=6$$

پس: $R(x)=2x+6$

.23

چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های x^2-1 برابر صفر است.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1\,,-1$$

بنابراین داریم:

$$p(1)=0\,,p(-1)=0 \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x)=p(x-1)+p(1-x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2)=p(2-1)+p(1-2)=p(1)+p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2)=0+0=0$$

.25

چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-2)=0$ است.

$$f(x)=x^4+ax^3-8x \Rightarrow f(-2)=16-8a+16=0$$

$$\Rightarrow 8a=32 \Rightarrow a=4 \Rightarrow f(x)=x^4+4x^3-8x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+4x^3-8x & x+2 \\
\underline{-(x^4+2x^3)} & \overline{x^3+2x^2-4x} \\
2x^3-8x & \\
\underline{-(2x^3+4x^2)} & \\
-4x^2-8x & \\
\underline{-(-4x^2-8x)} & \\
0 &
\end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x(x^2+2x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-1\pm\sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ برابر با $x=-1-\sqrt{5}$ است.

.26

با توجه به گزینه‌ها که همگی عبارتی درجه اول برحسب x هستند، خارج‌قسمت را به‌صورت $Q(x)=ax+b$ در نظر گرفته و با نوشتن رابطهٔ تقسیم داریم.

$$f(x)=(x^2+4x+5)(ax+b)+x+2$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=10(a+b)+3=13 \Rightarrow a+b=1$$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=2(-a+b)+1=11 \Rightarrow -a+b=5$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=5 \end{cases} \Rightarrow 2b=6 \rightarrow b=3 \rightarrow a=-2 \Rightarrow Q(x)=-2x+3$$

.27

می‌دانیم:

$$P(x)=ax^{۲}+bx+c\Rightarrow P'(x)=۲ax+b$$

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^{۲}+bx+c=(۲ax+b)(\frac{۱}{۲}x+۱)-۲$$
$$\Rightarrow ax^{۲}+bx+c=ax^{۲}+۲ax+\frac{b}{۲}x+b-۲$$
$$\Rightarrow ax^{۲}+bx+c=ax^{۲}+(۲a+\frac{b}{۲})x+(b-۲)\Rightarrow\begin{cases}b=۲a+\frac{b}{۲}\Rightarrow b=۴a\\ c=b-۲\end{cases}$$

برای آن که کمترین میزان مجموع ضرایب به‌دست آید $a=۱$ قابل قبول است. (برای هر مقدار a قابل قبول است.)

$$\Rightarrow\begin{cases}b=۴\\ c=۲\end{cases}\Rightarrow a+b+c=۱+۴+۲=۷$$

.28

ابتدا $p(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x)=x^{۳n+۱}+۲x^{۳n}+x^{۶}+۳x^{۵}+۱۶a=x^{۳n}\times x+۲x^{۳n}+x^{۶}+۳x^{۵}+۱۶a$$
$$=(x+۲)\cdot x^{۳n}+x^{۶}+۳x^{۵}+۱۶a$$

چون $p(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس باید $p(-۲)$ برابر صفر باشد.

$$p(-۲)=(-۲+۲)\times(-۲)^{۳n}+(-۲)^{۶}+۳\times(-۲)^{۵}+۱۶a=۰$$
$$\Rightarrow ۰+۶۴-۳\times ۳۲+۱۶a=۰\Rightarrow ۱۶a=۹۶-۶۴=۳۲\Rightarrow a=۲$$

برای $n=۱$ داریم:

$$p(x)=(x+۲)x^{۳}+x^{۶}+۳x^{۵}+۳۲=x^{۶}+۳x^{۵}+^{۴}+۲x^{۳}+۳۲$$

باقی‌مانده $p(x)$ بر عبارت درجه دوم $x^{۲}+۲x-۳=(x-۱)(x+۳)$ عبارت درجهٔ اولی به‌صورت $ax+b$ است و داریم:

$$x^{۶}+۳x^{۵}+^{۴}+۲x^{۳}+۳۲=(x-۱)(x+۳)Q(x)+ax+b$$
$$x=۱\Rightarrow ۱+۳+۱+۲+۳۲=۰+a+b\Rightarrow a+b=۳۹$$

توجه کنید که فقط در گزینه ۴ حاصل $a+b$ برابر ۳۹ است. هرچند b,a قابل محاسبه است.

$$x=-۳\Rightarrow ۷۲۹-۷۲۹+۸۱+۲(-۲۷)+۳۲=۰-۳a+b\Rightarrow -۳a+b=۵۹\Rightarrow ۳a-b=-۵۹$$
$$\begin{cases}a+b=۳۹\\ ۳a-b=-۵۹\end{cases}\Rightarrow ۴a=-۲۰\Rightarrow a=-۵\Rightarrow -۵+b=۳۹\to b=۴۴$$
$$\text{باقی‌مانده}=ax+b=-۵x+۴۴$$

.29

رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x)=(x^{۲}+۲x)Q(x)+۳x+۱$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^{۲}+۲x)Q'(x)+۳$$

با جایگذاری $x=-۲$ داریم:

$$P'(-۲)=-۲Q(-۲)+(۴-۴)Q'(-۲)+۳=-۲(۳)+۳=-۳$$

باقیماندهٔ $P'(x)$ بر $x+۲$ برابر $P'(-۲)$ است؛ باقیمانده برابر (-۳) است.

.30

با توجه به اتحاد تقسیم داریم: $p(x)=(x-1)q(x)+2$

چون $p^2(x)$ بر $x^2-4=(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر است، پس بر هر یک از عوامل آن یعنی $x-2$ و $x+2$ نیز بخش‌پذیر است، پس:

$$p^2(2)=p^2(-2)=0\Rightarrow p(2)=p(-2)=0$$

حال برای پیدا کردن $q(-2)$ در اتحاد تقسیم به جای x عدد -2 قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{p(-2)}=-3q(-2)+2\Rightarrow 3q(-2)=2\Rightarrow q(-2)=\frac{2}{3}$$

.31

گام اول

الف) وقتی $x\to 3$ حد عبارت صورت برابر -1 است. پس حد عبارت مخرج باید برابر 0^+ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود. حد عبارت مخرج وقتی $x\to 3$ در صورتی 0^+ می‌شود که $x=3$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x\to 3^+$ و $x\to 3^-$ باید برابر 0^+ شود).

ب) مخرج باید به صورت $2(x-3)^2$ باشد تا بتوان گفت $x=3$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

گام دوم

$$2(x-3)^2=2(x^2-6x+9)=2x^2-12x+18=2x^2+ax+b$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=-12\\ b=18\end{cases}\Rightarrow a+b=-12+18=6$$

.32

از حد داده‌شده می‌فهمیم که مخرج به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ برابر صفر می‌شود:

$$a\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=0\Rightarrow\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow a=\sqrt{3}$$

حال ببینیم که مخرج کسر داده‌شده به‌ازای $x\to(\frac{\pi}{3})^+$، از چه سمتی به صفر نزدیک می‌شود:

$$x\to(\frac{\pi}{3})^+:\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3})^+-\sin(\frac{\pi}{3})^+=\sqrt{3}(\frac{1}{2})^--(\frac{\sqrt{3}}{2})^+=(\frac{\sqrt{3}}{2})^--(\frac{\sqrt{3}}{2})^+\to 0^-$$

پس حد مخرج کسر به‌صورت 0^- شده و نتیجه می‌گیریم که حد صورت عددی مثبت خواهدبود.

$$ax+b\Big|_{x\to\frac{\pi}{3}^+}^{>0}\Rightarrow\sqrt{3}(\frac{\pi}{3})+b>0\Rightarrow b>\frac{-\pi}{\sqrt{3}}\simeq-1/000$$

کمترین مقدار صحیح b برابر -1 می‌شود.

.33

می‌دانیم: $\underbrace{2+4+6+\cdots+2n}_{n\text{ تا}}=n\cdot(n+1)$:مجموع n عدد زوج

چون حد تابع در منفی بی‌نهایت خواسته شده است پس از قاعدهٔ پرتوان استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{a^{2+4+\cdots+100}x^{2+4+\cdots+100}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{a^{50\times51}x^{50\times51}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|a^{51}x^{51}|}{a^{49}x^k}=-1$$

واضح است که $k=51$ است. از طرفی اگر $a=-1$ باشد با توجه به اینکه $x\to-\infty$ می‌رود عبارت از داخل قدر مطلق مثبت خارج می‌شود و خواهیم داشت $a^2=-1$ که نادرست است پس $a=1$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^{51}x^{51}}{a^{49}x^k}=-1\Rightarrow a^2=1\xrightarrow{a>0}a=1$$

.34

در $a \to -1^+$ عبارت $x+1$ مثبت است، از طرفی در مورد $[x]$ و $[-x]$ داریم:

$$[x]=[(-1)^+]=-1 \quad [-x]=[-(-1)^+]=[1^-]=0 \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}=\lim_{x\to-1^+}\frac{|x+1|+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x}=1$$

.35

روش اول:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0^-}\frac{(\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x})(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}{\sqrt{2(1-\cos x)}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{(2-3x)-(2-5x)}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}(2\sqrt{2})}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{-2\sin\frac{x}{2}(2\sqrt{2})}=\lim_{x\to0^-}\frac{4\frac{x}{2}}{-4\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2})}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{2|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+\frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1}$$

$$=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

.36

می‌دانیم $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ و $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^-}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^-}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^+}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{4\pi}{3}^\pm}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})^\pm}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^\pm}=\pm\infty$$

.37

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x+x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x+|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

.38

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} 2^{1-2n} = \dfrac{1}{2^{-1+2n}} \to 0 \\ 2^{2n+1} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه‌حل اول:

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n} - 1)}{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n} + 3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n} - 1}{2^{4n} + 3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^{4n} + 3) - 4}{(2^{4n} + 3)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \underbrace{\frac{4}{2^{4n} + 3}}_{0} = 1$$

.39

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} 3^{-2n+1} = \dfrac{1}{3^{2n-1}} \to 0 \\ 3^{2n} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-2n+1}(3^{4n-1} - 1)}{3^{-2n+1}(2 \times 3^{4n-1} + 1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{4n-1} - 1}{2 \times 3^{4n-1} + 1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3^{4n-1}}(1 - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3^{4n-1}}}})}{\cancel{3^{4n-1}}(2 + \underset{0}{\cancel{\frac{1}{3^{4n-1}}}})} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$(n \to +\infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{3^{4n-1}} \to 0\right)$$

.40

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{4x^n}{ax^3} \overset{n=3}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \to a = 2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{3}{2} + 7} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

.41

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12} \overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{4x^n} \overset{n=1}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{4x} = \frac{a}{4} = \frac{1}{6} \to 6a = 4 \to a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x - 12} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1(2x)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{12}}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24}$$

.42

چون $x\to-\infty$ پس جملات پُرتوان صورت و مخرج کسر را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{x^2+12}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x}{x}=a-1=1\Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{x+2}\overset{HOP}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to-2}\frac{2+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}}{1}$$

$$=2+\frac{-2}{\sqrt{16}}=\frac{3}{2}$$

.43

در $x\to1^+$ مقدار $[x]$ دقیقاً برابر ۱ است و داریم:

$$\lim_{x\to1^+}(4-[x])g(x)=\lim_{x\to1^+}(4-1)g(x)=\lim_{x\to1^+3}g(x)=6\Rightarrow\lim_{x\to1^+}g(x)=2\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$$

حد مخرج در $x\to1^+$ برابر صفر است و چون حاصل حد برابر عدد متناهی ۲ است، پس باید حد صورت هم صفر شود و عبارت زیر رادیکال یعنی ax^2+bx+c باید به فرم $a(x-1)^2$ باشد.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|\sqrt{a}}{|x-1|}=\sqrt{a}=2\Rightarrow a=4$$

حال حاصل $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ را می‌یابیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+bx+c}}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

.44

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|2x|}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2x}{x}=3$$

.45

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x}\overset{\text{توان بیشتر}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^2}-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+|x|-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{|x|}^{-}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

.46

$$f(x)=x\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3}{x}=\lim_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}}\right)^3=\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

.47

گام اول

می‌دانیم: $\sqrt{x^{۲}+۵} \underset{x\to\infty}{\sim} x$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج باهم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرائب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳-\sqrt{x^{۲}+۵}}{ax^{n}+۴}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳-x}{ax^{n}+۴}$$

$$\xrightarrow{n=۱}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳-x}{ax+۴}=\frac{-۱}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۲\Rightarrow f(x)=\frac{۳-\sqrt{x^{۲}+۵}}{-۲x+۴}$$

اکنون حاصل $\lim_{x\to۲} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲} f(x)=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{۳-\sqrt{x^{۲}+۵}}{-۲x+۴}\times\frac{۳+\sqrt{x^{۲}+۵}}{۳+\sqrt{x^{۲}+۵}}=\lim_{x\to۲}\frac{۹-x^{۲}-۵}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^{۲}+۵})}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{(۲-x)(۲+x)}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^{۲}+۵})}=\lim_{x\to۲}\frac{۲+x}{۲(۳+\sqrt{x^{۲}+۵})}=\frac{۲+۲}{۲(۳+\sqrt{۴+۵})}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

.48

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^{۲}+x+۱}}{x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^{۲}}}{x}$$

مشخص است که چون حد فوق برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس باید $a>۰$ باشد و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{a}}{x}=\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

حال خواست سؤال را محاسبه می‌کنیم.

$$x\to-۱^{-}\Rightarrow x<-۱\Rightarrow\frac{۱}{x}>-۱\Rightarrow\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱$$

$$\lim_{x\to-۱^{-}}\left[\frac{۱}{x}\right]f(x)=\lim_{x\to-۱^{-}}-f(x)=-\lim_{x\to-۱^{-}}\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۱}=-\sqrt{\frac{۱}{۴}(-۱)^{۲}+(-۱)+۱}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

.49

با فاکتور گرفتن ۲ از صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲(f(x)-\frac{۱}{۲})}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-\frac{۱}{۲}}{x-۱}$$

در تابع $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^{۲}+x-۱}$، توجه کنید که $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، پس:

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)$$

حال مشتق f در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}})(۲x^{۲}+x-۱)-(۴x+۱)x\sqrt{x}}{(۲x^{۲}+x-۱)^{۲}}$$

$$f'(۱)=\frac{(۱+\frac{۱}{۲})(۲+۱-۱)-(۴+۱)\times۱}{(۲+۱-۱)^{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}\times۲-۵}{۴}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

.50

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a+۲)}{۲x}$$
$$\xrightarrow{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۵}{۲}}\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱} f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}}\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}$$
$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{۲(x+۱)(-۳-\sqrt{۴+۵})}=\lim_{x\to-۱}\frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)}=\frac{۵}{۶}$$

.51

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید.

ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n=۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲}{۳x^۲}=\frac{a}{۳}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۲}{۳}\ \Rightarrow\ \frac{a}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=۲$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a، حاصل $f(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x^۲-۳x+۱}{۳x^۲+x}\Rightarrow f(-۱)=\frac{۲(-۱)^۲-۳(-۱)+۱}{۳(-۱)^۲-۱}=\frac{۲+۳+۱}{۳-۱}=\frac{۶}{۲}=۳$$

.52

ابتدا حاصل حد تابع $f(x)=\dfrac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}$ را وقتی $x\to+\infty$ برابر -۱ قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x\to+\infty$ عبارت $x^۲-۴$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبهٔ $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱$$

$$\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=\frac{|x^۲-۴|}{-x^۲-x+۲}$$

برای به دست آوردن $\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)$، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x\to(-۲)^+\Rightarrow x>-۲\Rightarrow x^۲<۴\Rightarrow x^۲-۴<۰\Rightarrow|x^۲-۴|=-(x^۲-۴)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x^۲-۴)}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{-۲-۲}{-۲-۱}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

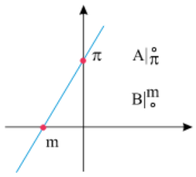
.53

معادلهٔ سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x-0)(x-4)=ax(x-4)$$
$$f(2)=1\Rightarrow -4a=1\Rightarrow a=\frac{-1}{4}$$
$$g(x)=\frac{-x}{4}+1=\frac{-1}{4}(x-4)$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}x(x-4)-\frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$
$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)}=\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{4}(x+1)=\frac{5}{4}$$

.54



$$f^{-1}:y-0=\frac{0-\pi}{m-0}(x-m)$$
$$y=-\frac{\pi}{m}x+\pi$$
$$f:\frac{\pi}{m}x=-y+\pi\Rightarrow x=-\frac{m}{\pi}y+m\Rightarrow y=-\frac{m}{\pi}x+m$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x+\pi}{-\frac{m}{\pi}x+m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x}=\frac{\pi^2}{m^2}=\pi\Rightarrow m^2=\pi\xrightarrow{m<0}m=-\sqrt{\pi}$$

.55

برای پیوستگی این تابع در $\mathbb{R}$، بایستی در $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1$$
$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1}=\frac{3(2+2)}{2+1}=4$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{1-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

حال برای پیوستگی f در $x=2$، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$2a-1=4\Rightarrow a=\frac{5}{2}=2/5$$

56.

مقدار تابع : $f(-۲) = a$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{۸+x^۳}{|x+۲|} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{-(x+۲)}$$
$$= -\lim_{x\to(-۲)^-} (x^۲-۲x+۴) = -(۴+۴+۴) = -۱۲$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -۱۲$ باشد.

57.

حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۱$ محاسبه می کنیم. برای این که تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ $\lim_{x\to۱} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to۱} f(x) = \lim_{x\to۱} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$$
$$\lim_{x\to۱} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} = \lim_{x\to۱} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{-(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})} =$$
$$\lim_{x\to۱} \frac{-۱}{\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{x})^۲}(۱+\sqrt{x})} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = ۱$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = ۱$ پیوسته نیست.

58.

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = ۱$ به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to۱^+} f(x) = \lim_{x\to۱^+} \frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{+}|}{x-۱} = \lim_{x\to۱^+} \frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = ۳$$

$$\lim_{x\to۱^-} f(x) = \lim_{x\to۱^-} \frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{-}|}{x-۱} = \lim_{x\to۱^-} \frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = -۳$$

این تابع در $x = ۱$ پیوسته نمی‌باشد.

59.

تابع f به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; -۱ < x < ۱ \\ ax+b & ; (x \geq ۱) \text{ یا } (x \leq -۱) \end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصلهٔ $(-۱,۱)$ و تابع $ax+b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در ۱ و ۱- پیوسته باشد.

$$f(۱) = \lim_{x\to۱^+} f(x) = \lim_{x\to۱^+} (ax+b) = a+b$$
$$\lim_{x\to۱^-} f(x) = \lim_{x\to۱^-} (x[x]) = ۰$$

f در $x = ۱$ پیوسته است، پس $a+b = ۰$ یا $a = -b$ است. ازطرفی f در ۱- پیوسته است؛ پس:

$$f(-۱) = \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} (ax+b) = -a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} (x[x]) = (-۱)\left[(-۱)^+\right] = (-۱)(-۱) = ۱$$

$$\Rightarrow -a+b = ۱ \xrightarrow{b=-a} -a-a = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

.60

ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در $x=2$ پیدا می‌کنیم:

$$① \lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|\overbrace{(x-2)}^{-}\overbrace{(x+1)}^{+}|}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-(x+1)=-3$$

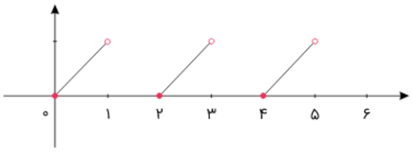
وقتی $x\to 2^+$ یعنی $x>2$ و در نتیجه $-x<-2$ است، پس $[-x]=-3$ و داریم:

$$② \lim_{x\to 2^+} a[-x]+3+3a=\lim_{x\to 2^+}(-3a+3+3a)=3$$

چون حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر نیستند، پس هیچ مقدار a جواب است.

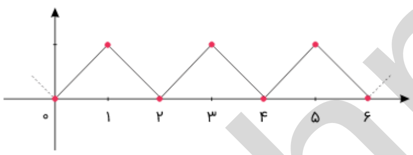
.61

بخشی از نمودار تابع $x-[x]$ وقتی که $[x]$ زوج باشد، به صورت زیر است:



$y=|x-[x]| \quad , \quad [x]=2k$

تابع را به صورت $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & ;\ [x]\ \text{زوج}\\ |x-a-[x-a]+a| & ;\ [x]\ \text{فرد}\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. اگر a مثبت باشد، شکل بالا را a واحد به سمت بالا و راست منتقل می‌کنیم، پس پیوسته نمی‌شود. اما اگر $a<0$ باشد، با انتقال، نمودار به‌صورت زیر پیوسته می‌شود:



برای پیوستگی در $\mathbb{R}$ لازم است ضابطهٔ دوم یعنی $|x-[x-a]|$ به شکل زیر شود؛ یعنی شیب آن منفی شود و a زوج منفی باشد که امکان‌پذیر نیست پس a وجود ندارد.

.62

$$\text{حد راست}:\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\frac{4}{2}=2$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{-2(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-2}=-2$$

$$f(2)=2$$

$$\Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

.63

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (۳x - [x]) = ۶ - [۲^-] = ۶ - ۱ = ۵ \\ f(۲) = a \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (x+۲) = ۴ \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x = ۲$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$، پس باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده در بالا، ازآنجاکه $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$،
بنابراین تابع f در $x = ۲$، به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - ۱ \\ [a^+] = a \end{cases}$$

.64

تابع در $x = ۱$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ برابرند.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \sqrt{a+۳} \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۱ + a$$

$$\Rightarrow ۱ + a = \sqrt{a+۳} \Rightarrow a^۲ + ۲a + ۱ = a + ۳ \Rightarrow a^۲ + a - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (a+۲)(a-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \ \checkmark \\ a = -۲ \ \times \end{cases}$$

به ازای $a = -۲$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{۳}{۴})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+۳} = \sqrt{x+۳}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴}) = \sqrt{-\frac{۳}{۴} + ۳} = \sqrt{\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

.65

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = ۱$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

بنابراین داریم:

$$f(۱) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (ax - a + ۲) = a - a + ۲ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{x-\sqrt{x}} = \frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x})\cancel{(\sqrt{x}-۱)}} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

.66

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x>2$ و $x<2$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x=2$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax+b = 2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2+bx-1 = 4+2b-1 = 3+2b$$

$$f(2)=5 \Rightarrow 2a+b = 3+2b = 5$$

داریم:

$$3+2b=5 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1$$

$$2a+b=5 \Rightarrow 2a+1=5 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$$

.67

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ;x\neq 0 \\ a & ;x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-1)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-1)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-1)}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = -\frac{1}{4}$$

.68

تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = a$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x+1)(\sin x-1)}{(1-\sin^2 x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x+1)\cancel{(\sin x-1)}}{-\cancel{(\sin x-1)}(\sin x+1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\frac{2\sin x+1}{\sin x+1}) = -\frac{3}{2}$$

.69

گام اول

الف) شرط پیوستگی در نقطه‌ای به طول $x=\circ$ عبارت است از:

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x)=\lim_{x\to\circ^-} f(x)=f(\circ)$$

ب) در این تست $f(\circ)=a$ است، پس برای اینکه تابع پیوسته باشد باید $\lim\limits_{x\to\circ}\sin\frac{\pi}{x}=a$ باشد.

گام دوم

با به دست آوردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to\circ$، شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\circ} f(x)=\lim_{x\to\circ}\sin\frac{\pi}{x}\to \text{وجود ندارد}$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع $f(x)$ در $x=\circ$ پیوسته نیست.

.70

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_\circ$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x)=\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)=f(x_\circ)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{۱-\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{\frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{\cos^۲x}}{\cos^۲x-\sin^۲x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۱}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} a\cos ۳x=a\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$f(\frac{\pi}{۴})=a\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x=\frac{\pi}{۴}$، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=f(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}a=۲\Rightarrow \sqrt{۲}a=-۴\Rightarrow a=-\frac{۴}{\sqrt{۲}}\Rightarrow a=-۲\sqrt{۲}$$

.71

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=a\log_۲^۴=۲a\\ \lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=۳a+۱\end{cases}\Rightarrow ۳a+۱=۲a\Rightarrow a=-۱$$

$$x<۳:\ f(x)=ax+۲^{x-۳}=-x+۲^{x-۳}$$

$$f(۲)=-۲+۲^{-۱}=-۲+\frac{۱}{۲}=-۱/۵$$

.72

اگر $x=2k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin\frac{\pi}{2}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k\in\mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و درنتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.

حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x=2k+1$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطهٔ فردی مانند $x=1$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x=(-1)^1\sin\frac{\pi}{2}=(-1)(1)=-1$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x=(-1)^0\sin\frac{\pi}{2}=(1)(1)=1$$
$$f(1)=(-1)^1\sin\frac{\pi}{2}=(-1)(1)=-1$$

$\Rightarrow \lim_{x\to1^+} f(x)\neq\lim_{x\to1^-} f(x)\Rightarrow$ در اعداد فرد ناپیوسته است

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

.73

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;|x-1|<1\\ x^2+ax+b & ;|x-1|\geq1\end{cases}=\begin{cases}(x-1)[x] & ;-1<x-1<1\\ x^2+ax+b & ;x-1\geq1 \text{ یا } x-1\leq-1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}(x-1)[x] & ;0<x<2\\ x^2+ax+b & ;x\geq2 \text{ یا } x\leq0\end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x=0$ و $x=2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\lim_{x\to2^+} f(x)=4+2a+b\\ \lim_{x\to2^-} f(x)=(2-1)[2^-]=1\end{cases}\Rightarrow 4+2a+b=1\quad(I)$$
$$\begin{cases}\lim_{x\to0^+} f(x)=(0-1)[0^+]=0\\ \lim_{x\to0^-} f(x)=b\end{cases}\Rightarrow b=0\quad(II)$$
$$\xrightarrow{(I),(II)} a=-\frac{3}{2}$$

.74

مقدار تابع و حد چپ و راست تابع را در $x=0$ می‌یابیم:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}[x]-2a=-1-2a$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{2bx^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2bx^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\frac{x^2}{4}}{2bx^2}=\frac{1}{4b}$$
$$f(0)=|b-0|=|b|$$

حال برای پیوستگی باید: $-1-2a=\frac{1}{4b}=|b|$

$$\Rightarrow |b|=\frac{1}{4b}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{4b}\Rightarrow 4b^2=1\Rightarrow b=\frac{1}{2}\ ,b>0\\ b=-\frac{1}{4b}\Rightarrow -4b^2=1 \text{ غ ق ق}\end{cases}$$
$$-1-2a=\frac{1}{4b}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$$
$$b-a=\frac{1}{2}-(-\frac{3}{4})=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

توجه: تابع f همواره پیوسته نیست! در نقاط $\mathbb{Z}^-$ این تابع ناپیوسته است.

.75

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه‌به نامعادلات قدر مطلقی، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ x[x] & , \quad -۱<x<۱ \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد.

می‌دانیم خط $x=۳$ بالای خط $x=۱$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد آن با محور عرض ها از ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ استفاده کرد.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to ۱^+} ax+b=\lim_{x\to ۱^-} x[x]\Rightarrow a+b=۱\times ۰=۰\Rightarrow a+b=۰ \quad (I)$$

بررسی پیوستگی تابع در $x=-۱$:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} ax+b=-a+b \ , \ f(-۱)=-a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} x[x]=(-۱)[-۱^+]=(-۱)(-۱)=۱$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=f(-۱)\Rightarrow -a+b=۱ \quad (II)$$

از دو رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\overset{(I)}{\Rightarrow} a=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ax+b=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x=۳} f(۳)=-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=-۱$$

.76

تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=۵$ پیوسته است، پس:

$$x=۱ \text{ پیوستگی در } : \tan\frac{۳\pi}{۴}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\overbrace{|x^۲+x-۲|}^{(x+۲)(x-۱)}}{a(۱-x)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x+۲)(x-۱)}{a(۱-x)}\Rightarrow -۱=\frac{۳}{-a}\Rightarrow a=۳$$
$$x=۵ \text{ پیوستگی در } : b(۵-[-۵])=\lim_{x\to ۵^-}\frac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)}\Rightarrow ۱۰b=\frac{۲۸}{۳(-۴)}\Rightarrow b=\frac{-۷}{۳۰}$$
$$a\times b=۳\times(\frac{-۷}{۳۰})=(\frac{-۷}{۱۰})=-۰/۷$$

.77

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x\in\mathbb{Z}$ و $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ; x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \end{cases}$$

ضابطهٔ $g(x)$ را باتوجه‌به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازهٔ $[-۴,۴]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & ; x\notin\mathbb{Z} \\ ۰ & ; x\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\notin\mathbb{Z} \\ f(x)-۱ & ; x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} -۱ & ; x\notin\mathbb{Z} \\ -۱ & ; x\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow g(x)=-۱ \quad ; x\in\mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازهٔ $[-۴,۴]$ تابع $g(x)=-۱$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

.78

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x+۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۴ \\ ۱+\sqrt[۳]{x+۱} \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۲ \\ x+۵ \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-۴, +\infty) - \{-۲\}$$

بنابراین تنها در $x = -۲$ ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۱ نقطه است.

.79

$$f(x) = \left[x-\frac{۱}{۳}\right] + \left[x+\frac{۲}{۳}\right] = \left[x-\frac{۱}{۳}\right] + \left[x-\frac{۱}{۳}+۱\right]$$
$$= \left[x-\frac{۱}{۳}\right] + \left[x-\frac{۱}{۳}\right] + ۱ = ۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right] + ۱$$

عبارت خطی $x - \frac{۱}{۳}$ در نقاط صحیح کنندهٔ $\left\{\frac{۴}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{-۲}{۳}\right\}$ از بازهٔ $\left(-\frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to(-\frac{۵}{۳})^+} \left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right) = ۲\left[(-۲)^+\right]+۱ = ۲(-۲)+۱ = -۳$$
$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right) = -۳$$
$$\lim_{x\to(\frac{۵}{۳})^-} \left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right) = ۲\left[(\frac{۴}{۳})^-\right]+۱ = ۲\times۱+۱ = ۳ \quad , \quad f\left(\frac{۵}{۳}\right) = ۳$$

پس f در $-\frac{۵}{۳}$ پیوستگی راست و در $\frac{۵}{۳}$ پیوستگی چپ دارد. درنهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۳ نقطه است.

.80

$$f(x) = [x]\sin \pi x \quad ; \quad x \in [-۲\,, ۲]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما ازآنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش صفر نقطه است.

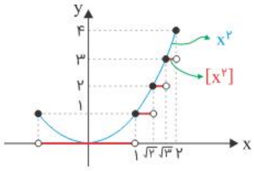
.81

گام اول

تابع $y=[f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x^۲]$ در بازهٔ $[-۱,۲]$، رسم نمودار این تابع در بازهٔ موردنظر است:



باتوجه‌به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x=۱$، $x=\sqrt{۲}$، $x=\sqrt{۳}$، $x=۲$ و $x=-۱$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ دارای پنج نقطهٔ ناپیوستگی است.

.82

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sin^{۲n}(x)=\lim_{n\to+\infty}(\sin^{۲}(x))^n$$

می‌دانیم $۰\le\sin^{۲}(x)\le۱$ است، پس در نقاطی که $\sin x\in[۰,۱)$ حاصل حد برابر صفر خواهد بود، زیرا اعداد بازهٔ $(۰,۱)$ را هرچه به توان بزرگ‌تر برسانیم کوچک و کوچک‌تر می‌شود:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sin^{۲n}(x)=\begin{cases}۱ & ;x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & ;x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تابع داده‌شده در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۴ نقطهٔ ناپیوستگی داریم. کلید سنجش دو نقطه است، پس ابتدا و انتهای بازه را با تعریف پیوستگی در بازه، پیوسته در نظر می‌گیریم.

.83

$$|x^۳|=x^۲\Rightarrow x^۲|x|=x^۲\Rightarrow x^۲(|x|-۱)=۰\Rightarrow x=۰,۱,-۱$$

$$f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & ;x\in(-۱,۱)-\{۰\}\\ ۱+\cos\pi x & ;x=۰,۱,-۱\\ [x^۲]-[x] & ;x<-۱ \text{ یا } x>۱\end{cases}$$

ضابطهٔ سوم به‌ازای تمام xهایی که در آن $x^۲$ صحیح ولی x غیرصحیح می‌شود، ناپیوسته است. همچنین در همهٔ xهای صحیح منفی ناپیوسته است. پس تابع f در بی‌شمار نقطه ناپیوسته است.

.84

به راحتی می‌توانیم $(fof)og$ را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی‌ها را کنترل کنیم.

$$(x>۰)\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{f}۰$$
$$(x=۰)\xrightarrow{g}۰\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{f}۰$$
$$(x<۰)\xrightarrow{g}-۱\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{f}۰$$

در واقع $((fof)og)(x)=۰$ است و همواره پیوسته خواهد بود.

.85

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$، در این صورت حاصل $[x]+[-x]=-1$ است.

گام دوم

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ;x\notin \mathbb{Z}\\ a & ;x\in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to t^-} f(x)=\lim_{x\to t^+} f(x)=f(t)\Rightarrow a=-1$$

.86

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ داده‌شده روی بازهٔ $[1,+\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x=6$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-} \sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$f(6)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+} a+\cos^2\frac{\pi x}{36}=a+\cos^2\frac{\pi}{6}=a+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=a+\frac{3}{4}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=6$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

.87

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_\circ$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} x^۲ + ax - ۵ = ۲^۲ + ۲a - ۵ = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} ax - ۱ = ۲a - ۱$$

$$f(۲) = ۲a - ۱$$

به ازای هر مقدار حقیقی a، تساوی $۲a - ۱ = ۲a - ۱$ برقرار است.

.88

طبق فرض، تابع $f(x) = \dfrac{x^۲ + ax + b}{x - ۱}$ در نقطه‌ای حد دارد ولی در آن نقطه پیوسته نیست؛ این نقطه اولاً $x = ۱$ بوده و ثانیاً $x = ۱$ ریشهٔ صورت f نیز هست، پس:

$$x^۲ + ax + b\Big|_{x=۱}^{=\circ} \Rightarrow ۱ + a + b = \circ \Rightarrow a + b = -۱ (I)$$

همچنین $x = ۱$ ریشهٔ معادلهٔ داده‌شده است:

$$۵x^۲ - ax + b\Big|_{x=۱}^{=\circ} \Rightarrow ۵ - a + b = \circ \Rightarrow a - b = ۵ (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} a + b = -۱ \\ a - b = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = -۳$$

$$[\frac{b - ۲a}{۳}] = [\frac{-۳ - ۴}{۳}] = [\frac{-۷}{۳}] = -۳$$

.89

صورت کسر به ازای $x = 1$ صفر می‌شود، پس باید مخرج هم به ازای $x = 1$ صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام داشته باشیم.

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-a\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}} + a}{ax - a} = \lim_{x\to 1} \frac{-\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}} + 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}} + 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}} + 1}{\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - 2 + \sqrt[3]{x}}{(x - 1)(1 + \sqrt{2 - \sqrt[3]{x}})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{2(x - 1)} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{2(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{2(x - 1) \times 3} = \frac{1}{6}$$

از قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ استفاده کرد:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}} + 1}{x - 1} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{2 - \sqrt[3]{x}}}}{1} = \frac{1}{6}$$

.90

$$(3a, 0), (0, 2a) \in f \Rightarrow \text{شیب خط} = m = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a$$

$$(-m, 0), (0, 2m) \in g \Rightarrow \text{شیب خط} = m' = 2 \Rightarrow g(x) = 2x + 2m$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x + m}{|-\frac{2}{3}x + 2a|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-\frac{2}{3}x} = -3$$

$$x \to -\infty : -\frac{1}{3}x \to +\infty \Rightarrow |-\frac{1}{3}x + a| = -\frac{1}{3}x + a$$

.91

a باید ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. ازطرفی ریشهٔ مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m + 3)^2 - 4(6)(\frac{m}{2}) = m^2 + 6m + 9 - 12m = m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$x = a = \frac{-(m + 3)}{2 \times 6} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6(x + \frac{1}{2})^2}}{|2x^3 + \frac{1}{4}|} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}|x + \frac{1}{2}|}{2|x^3 + \frac{1}{8}|}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}\cancel{|x + \frac{1}{2}|}}{2\cancel{|x + \frac{1}{2}|}|x^2 + \frac{1}{4} - \frac{x}{2}|} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2}\tan b = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

.92

با جاگذاری $x=8$ در صورت کسر به صفر می‌رسیم ولی پاسخ حد باید مقداری غیرصفر باشد، پس باید مخرج هم صفر شود که رفع ابهام کسر صفر صفرم داشته باشیم:

$$8a-b=0 \Rightarrow 8a=b$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{b(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2)}{b(\frac{x}{8}-1)}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}+2-4}{\frac{x}{2}-4}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\frac{x}{2}-4}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{6x-48}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{6(x-8)}=\frac{1}{6}$$

.93

$$\begin{matrix} f(x)=-3x \\ f(x)=\frac{3}{4}x \end{matrix}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-3x|}{\frac{3}{4}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\frac{3}{4}x}=-4$$

دقت کنید وقتی $x\to-\infty$، $-3x\to\infty$ پس: $|-3x|=-3x$

.94

چون در پیوستگی، باید مقدار حد چپ و راست با هم برابر باشد پس زیر رادیکال باید ریشه مضاعف داشته باشیم:

$$\sqrt{3x^2+(m-1)x+(m-4)}=\sqrt{(x+1)(3x+m-4)}\Rightarrow m-4=3\Rightarrow m=7$$

$$m=7: |x^3+((m-7)x+a)^2|=|x^3+a^2|$$

$x=a$ ریشه صورت و مخرج است، پس: $a=-1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3+1|}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1|(x^2-x+1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=-1: f(-1)=\frac{2\sin b}{3\sqrt{-1+2}}=\frac{2\sin b}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\sin b=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=\frac{\pi}{3}$$

.95

طبق فرض داریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\xrightarrow{g=\frac{1}{f}}g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$$

$$\text{نکته:}\begin{cases} f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a} \\ g^{-1}(x)=\dfrac{-bx+d}{ax-c} \end{cases}$$

طبق برابری‌های حد در $(x\to-\infty)$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(m)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=1\Rightarrow\frac{b}{a}=\pm1$$

خواسته سؤال: $\lim_{x\to0^+}f^{-1}(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-dx+b}{cx-a}=\frac{-b}{a}=1$ یا (-1)

.96

سؤال را در دو بخش n زوج و n فرد حل می‌کنیم:

الف) فرض کنیم n زوج است، داریم:

$$x = n = \text{زوج} \to [x] = \text{زوج}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(n) = |n - [-n]| = |۲n| \\ f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{زوج}} = |n - [-(n^+)]| = |n - \overbrace{[-n^-]}^{-n-۱}| = |۲n + ۱| \end{cases}$$

نیازی به محاسبه $f(n^-)$ نیست چون در حالت n زوج، $f(n) \neq f(n^+)$ است، پس به‌ازای n زوج، تابع f در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته نیست:

ب) فرض کنیم n فرد است، داریم:

$$x = n = \text{فرد} \to [x] = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(n) = n - [n] + k = n - n + k = k \\ f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{فرد}} = n - [n^+] + k = n - n + k = k \\ f(n^-) \xrightarrow{[n^-] = \text{زوج}} = |n - [-(n^-)]| = |n - \underbrace{[-n^+]}_{-n}| = |۲n| \end{cases}$$

در این حالت، تابع f اگر بخواهد در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته باشد، باید:

$$k = k = |۲n|$$

با شرط n فرد طبیعی، به‌ازای $k = ۲n$، تابع f در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است.

.97

$$\text{فرد}\, n \Rightarrow [n^+] = n \ , \ [n^-] = n - ۱ \ , \ [-n^+] = -n \ , \ [-n^-] = -n - ۱$$

$$\lim_{x \to n^+} |[-x] - x| = |(-n - ۱) - n| = ۲n + ۱ = \lim_{x \to n^-} k - x + [x] = k - n + (n - ۱) = k - ۱ \Rightarrow k = ۲n + ۲$$

$$\lim_{x \to -n^+} |[-x] - x| = |(n - ۱) + n| = ۲n - ۱ = \lim_{x \to -n^-} k - x + [x] = k + n + (-n - ۱) = k - ۱ \Rightarrow k = ۲n$$

با توجه به مقادیر مختلف که برای k به دست آمده، پس برای nهای فرد پیوسته نیست.

$$\text{زوج}\, n \Rightarrow [n^+] = n \ , \ [n^-] = n - ۱ \ , \ [-n^+] = -n - ۱ \ , \ [-n^-] = -n$$

$$\lim_{x \to n^-} |[-x] - x| = |-n - n| = ۲n = \lim_{x \to n^+} k - x + [x] = k - n + n = k \Rightarrow k = ۲n$$

$$\lim_{x \to -n^+} k - x + [x] = k + n + (-n) = k = \lim_{x \to -n^-} |[-x] - x| = |n + n| = ۲n \Rightarrow k = ۲n$$

با توجه به مقادیر مساوی که برای k به دست آمد، پس برای nهای زوج پیوسته است.