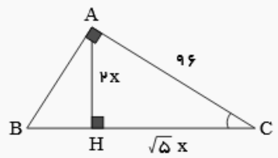
فصل ۷: بانک تست کنکور مثلثات

.1

چون $\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ است می‌توان $CH = \sqrt{۵x}$ و $AH = ۲x$ را در نظر گرفت.



$$\overset{\Delta}{AHC} : (۹۶)^۲ = (۲x)^۲ + (\sqrt{۵x})^۲ \to ۹۶ \times ۹۶ = ۴x^۲ + ۵x^۲ \to ۹۶ \times ۹۶ = ۹x^۲ \to x^۲ = ۳۲ \times ۳۲ \to x = ۳۲$$

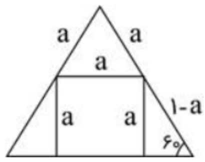
$$\to AH = ۲x = ۶۴$$

.2

$$۱ + \cot^۲ C = \frac{۱}{\sin^۲ C} \to ۱ + \cot^۲ C = \frac{۱۶۹}{۲۵} \to \cot^۲ C = \frac{۱۴۴}{۲۵} \to \cot C = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : \cot C = \frac{CH}{AH} \to \frac{۱۲}{۵} = \frac{۹}{AH} \to ۱۲AH = ۴۵ \to AH = ۳/۷۵$$

.3



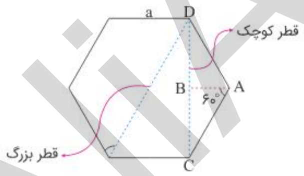
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

.4

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC \sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

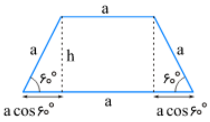
ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

.5

$$(\text{محیط})\ P = ۳a + ۲a\cos ۶۰^\circ + a \Rightarrow ۳۰ = ۵a \Rightarrow a = ۶$$

$$S = \frac{(a+۲a)h}{۲} = \frac{۳a \times a\sin ۶۰^\circ}{۲} \xrightarrow{a=۶} S = \frac{۳\sqrt{۳}\times ۶^۲}{۴} = ۲۷\sqrt{۳}$$



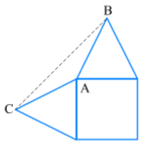
.6

مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بینشان به دست می‌آید.

$$S = \frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})(\sin ۶۰^\circ) = (۴۸\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۲۴ \times ۳ = ۷۲$$

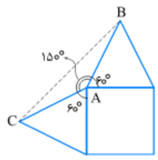
.7

بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟



۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \frac{۱}{۲} = ۱$$

.8

$$\tan ۲۸۵^\circ = \tan(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\cot ۱۵^\circ$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ) = -\tan ۱۶۵^\circ = -\tan(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \tan ۱۵^\circ$$

$$\sin(۱۰۹۵^\circ) = \sin(۶\times ۱۸۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$$

$$\cos(۲۵۵^\circ) = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin ۱۵^\circ$$

پس : $\tan(۲۸۵^\circ)\cdot\tan(-۱۶۵^\circ) - \sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ) = (-\cot ۱۵^\circ)(\tan ۱۵^\circ) - (\sin ۱۵^\circ)(-\sin ۱۵^\circ)$

$$= -۱ + \sin^۲ ۱۵^\circ = -(۱-\sin^۲ ۱۵^\circ) = -\cos^۲ ۱۵^\circ$$

.9

$$\tan ۳۰۰^\circ = \tan(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) = \tan(-۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \cos(۲۷۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\sin(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۸۰^\circ = \tan(۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ) = \tan(۱۲۰^\circ) = \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan(۶۰^\circ) = -\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰^\circ = \sin(۴\times ۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ) = \sin(۱۲۰^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin(۶۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس : $\tan(۳۰۰^\circ)\cos(۲۱۰^\circ) + \tan(۴۸۰^\circ)\sin(۸۴۰^\circ) = (-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

.10

می‌دانیم: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

ضابطهٔ تابع f را در $\sin^2 3x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = 16\left(\frac{\overbrace{\sin 3x\cos 3x}^{\frac{1}{2}\sin 6x}\cos 6x\cos 12x\cos 24x}{\sin 3x}\right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 6x$$
$$\sin 6x\cos 6x = \frac{1}{2}\sin 12x$$
$$\sin 12x\cos 12x = \frac{1}{2}\sin 24x$$
$$\sin 24x\cos 24x = \frac{1}{2}\sin 48x$$
$$f(x) = 16\left(\frac{\frac{1}{16}\sin 48x}{\sin 3x}\right)^2$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16\left(\frac{\sin\frac{48\pi}{36}}{16\sin\frac{3\times\pi}{36}}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{4\pi}{3}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ و $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و البته: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{16\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

.11

با استفاده از اتحادهایی که درستی آن‌ها را می‌دانیم، می‌توان به اتحاد زیر رسید:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

اول از اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = 4\sin\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha = 6\sin\alpha - 8\sin^3\alpha$$
$$\xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} f(\alpha) = 2\left(\underbrace{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}_{\sin 3\alpha}\right) = 2\sin 3\alpha$$

پس:

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2\sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) = 2\sin\left(14\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\times\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

.12

طرفین تابع را در $\sin^2 x$ ضرب می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
f(x)\sin^2 x &= 32\sin^2 x\cos^2 x\cos^2(2x)\cos^2(4x)\cos^2(8x)\cos^2(16x)\\
&= 8\sin^2(2x)\cos^2(2x)\cos^2(4x)\cos^2(8x)\cos^2(16x)\\
&= 2\sin^2(4x)\cos^2(4x)\cos^2(8x)\cos^2(16x)\\
&= \frac{1}{32}\sin^2(32x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2(32x)}{32\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin^2\frac{32\pi}{12}}{32\sin^2\frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{32\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}
$$

$$
\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{32\times\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{16\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}
$$

$$
= \frac{\frac{3}{4}}{8(2-\sqrt{3})} = \frac{3}{32(2-\sqrt{3})} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{32} = \frac{6+\sqrt{27}}{32}
$$

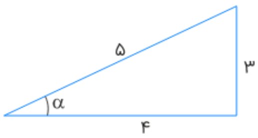
.13

$$
\sin\alpha = 2\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = 2 \Rightarrow \tan^2\alpha = 4 \Rightarrow 1+\tan^2\alpha = 5
$$

$$
\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 5 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}
$$

$$
\xrightarrow{\cos\alpha<0} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{10}
$$

.14



$$
\tan\alpha = \frac{3}{4} \quad,\quad \cot\alpha = \frac{4}{3} \quad,\quad \sin\alpha = -\frac{3}{5} \quad,\quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}
$$

$$
\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{2}}
$$

$$
= \frac{2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{4}{5}}{\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{2}} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{6}{5}+1\right)}{\frac{16-9}{24}} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{11}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{4(11)(24)}{5(5)(7)} = \frac{1056}{175}
$$

$$
\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{2}
$$

.15

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{16}}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=\frac{\frac{8(17-15)}{15\times17}}{\frac{-7}{17}}=\frac{8\times2}{-7\times15}=-\frac{16}{105}$$

.16

$\cos\alpha=\frac{2}{3}$ و α در ناحیهٔ چهارم است:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}\quad,\quad \tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\frac{5}{4}-1}=\frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

.17

در فرض تست مقدار $\tan 20^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به‌صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویهٔ 20° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan 20^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\frac{\sin250^\circ+\sin700^\circ}{\cos560^\circ-\cos110^\circ}=\frac{\sin(270^\circ-20^\circ)+\sin(720^\circ-20^\circ)}{\cos(540^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}$$

$$=\frac{-\cos20^\circ+\sin(-20^\circ)}{\cos(180^\circ+20^\circ)-(-\sin20^\circ)}=\frac{-\cos20^\circ-\sin20^\circ}{-\cos20^\circ+\sin20^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div\cos20^\circ}A=\frac{\frac{-\cos20^\circ}{\cos20^\circ}-\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}}{\frac{-\cos20^\circ}{\cos20^\circ}+\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}}=\frac{-1-\tan20^\circ}{-1+\tan20^\circ}=\frac{-1-0/4}{-1+0/4}=\frac{-1/4}{-0/6}=\frac{7}{3}$$

.18

گام اول

باتوجه‌به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan 15^\circ$ داده شده است، سعی می‌کنیم تمام زوایا را برحسب زاویهٔ 15° به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos285^\circ-\sin255^\circ}{\sin525^\circ-\sin105^\circ}=\frac{\cos(270^\circ+15^\circ)-\sin(270^\circ-15^\circ)}{\sin(540^\circ-15^\circ)-\sin(90^\circ+15^\circ)}$$

$$=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+15^\circ)-\sin(\frac{3\pi}{2}-15^\circ)}{\sin(3\pi-15^\circ)-\sin(\frac{\pi}{2}+15^\circ)}=\frac{\sin15^\circ-(-\cos15^\circ)}{\sin15^\circ-\cos15^\circ}=\frac{\sin15^\circ+\cos15^\circ}{\sin15^\circ-\cos15^\circ}$$

برای اینکه در کسر داده‌شده $\tan 15^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin15^\circ+\cos15^\circ}{\cos15^\circ}}{\frac{\sin15^\circ-\cos15^\circ}{\cos15^\circ}}=\frac{\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}+\frac{\cos15^\circ}{\cos15^\circ}}{\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}-\frac{\cos15^\circ}{\cos15^\circ}}$$

$$=\frac{\tan15^\circ+1}{\tan15^\circ-1}=\frac{0/28+1}{0/28-1}=\frac{1/28}{-0/72}=-\frac{128}{72}=-\frac{16}{9}$$

.19

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(3\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

باتوجه‌به اینکه مقدار $\tan\theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده‌شده برحسب $\tan\theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\tan\theta+1}{2\tan\theta}=\frac{0/2+1}{2(0/2)}=\frac{1/2}{0/4}=3$$

.20

طرفین $2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم و از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 2\tan^2 x+1=\frac{4}{3}(1+\tan^2 x)\xrightarrow{\times 3}6\tan^2 x+3=4+4\tan^2 x\Rightarrow 2\tan^2 x=1$$
$$\Rightarrow \tan^2 x=\frac{1}{2}$$

روش دوم: از روابط $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ و $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}$$

$$2\sin^2 x+1-\sin^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow\sin^2 x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+\cos^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow 2-2\cos^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}\Rightarrow\cos^2 x=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

.21

می‌دانیم $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$ است، پس:

$$\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{4}{3}\Rightarrow-2\cot2\alpha=\frac{4}{3}\Rightarrow\cot2\alpha=-\frac{2}{3}$$

پس $\tan2\alpha=-\frac{3}{2}$ است.

.22

$$\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{18\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{12\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

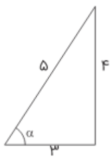
حاصل عبارت برابر است با:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=0$$

.23

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha=\frac{۴}{۳}\ ,\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$$
$$\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\ \ ,\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$
$$\text{حاصل}:\cos\alpha(-\sin\alpha)-(-\cot\alpha)=-\frac{۳}{۵}(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}$$
$$=-\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰}=\frac{۲۷}{۱۰۰}$$

.24

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳}=\sin(\frac{۱۸\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(-\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})$$
$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(\frac{۲۰\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$
$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=-\sin(\frac{۱۲\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

.25

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(\frac{۱۲\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$
$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(\frac{۱۶\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(\frac{۱۲\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$A=\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

.26

$$A=\sqrt{۱+\tan^{۲}x}(۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}-\sin^{۲}x)=\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}-\sin^{۲}x\right)$$
$$=\frac{۱}{|\cos x|}(۲\times\frac{۱}{۲}-\sin^{۲}x)=\frac{۱-\sin^{۲}x}{|\cos x|}=\frac{\cos^{۲}x}{|\cos x|}$$

چون $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ است، یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و درنتیجه $|\cos x|=-\cos x$ است. پس:

$$A=\frac{\cos^{۲}x}{-\cos x}=-\cos x$$

.27

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{\tan x}{\frac{1}{\frac{1}{|\cos x|}}}\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times|\cos x|\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ باشد آنگاه $\cos x<0$ است، پس $|\cos x|=-\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\times(-\cos x)\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\cos^2 x$$

.28

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

.29

$$\sin x+\cos x=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow 1+\sin 2x=\frac{9}{5}\Rightarrow\sin 2x=\frac{4}{5}$$

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow 4+4\tan^2 x=10\tan x\Rightarrow 4(1+\tan^2 x)=10\tan x$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2 x=\frac{5}{2}\tan x\xrightarrow{\times 2}2\tan^2-5\tan x+2=0\xrightarrow{\Delta=9}\begin{cases}\tan x=2\\ \tan x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

.30

از رابطهٔ داده شده، مقدار $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\Rightarrow 4+4\sin x=1-\sin x\Rightarrow 5\sin x=-3\Rightarrow\sin x=\frac{-3}{5}$$

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{ناحیهٔ ۳ } x}\cos x=\frac{-4}{5}$$

حاصل $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ را می‌یابیم.

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\tan^2(\frac{x}{2})\Rightarrow\tan^2(\frac{x}{2})=\frac{1-(-\frac{4}{5})}{1+(-\frac{4}{5})}\Rightarrow\tan^2(\frac{x}{2})=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}=9\Rightarrow\tan(\frac{x}{2})=\pm 3$$

$$\pi<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$$

$\frac{x}{2}$ زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم است و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:

$$\tan(\frac{x}{2})=-3$$

.31

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$A=B+45=B+\frac{\pi}{4},\ A+B+C=\pi$$

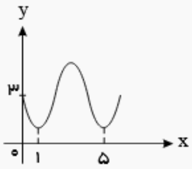
$$2\cos A\sin B-\sin C=\sin(B+A)+\sin(B-A)-\sin C$$

$$=\sin(\pi-C)+\sin(\frac{-\pi}{4})-\sin C$$

$$=\sin C-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

.32

با توجه به شکل روبه‌رو به‌راحتی پی می‌بریم که دورهٔ تناوب اصلی تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ برابر $T=۴$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(۰)=۳\to a=۳$



توجه کنید که دورهٔ تناوب تابع $y=\sin kx$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|k|}$ است.

$$y=a+\sin(\underbrace{b\pi}_{k}\, x)\Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب}=T=\frac{۲\pi}{|k|}=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{|b|}\xrightarrow{T=۴}\frac{۲}{|b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\to b=\pm\frac{۱}{۲}$$

چون به‌ازای $x>۰$، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b=-\frac{۱}{۲}$ است. داریم:

$$y=۳+\sin(-\frac{۱}{۲}\pi x)$$

$$\Rightarrow y(\frac{۲۵}{۳})=۳+\sin(-\frac{۲۵}{۶}\pi)=۳-\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin\frac{\pi}{۶}=۳-\frac{۱}{۲}=۲{,}۵$$

.33

در تابع $y=a\sin bx+c$ مقدار ماکسیمم تابع از رابطهٔ $Max=|a|+c$ به‌دست می‌آید.

$$Max=\frac{۳}{۲}\to |b|+a=\frac{۳}{۲}\xrightarrow[\text{است پس } b<۰ \text{ است}]{\text{شکل فرمت قرینهٔ سینوس}}-b+a=\frac{۳}{۲}$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}} ۰=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})\to ۰=a+b\cos\frac{\pi}{۳}\to a+\frac{b}{۲}=۰\to\begin{cases}-b+a=\frac{۳}{۲}\\ a+\frac{b}{۲}=۰\end{cases}\to ۳a=\frac{۳}{۲}\to a=\frac{۱}{۲},b=-۱$$

.34

در تابع $y=a\sin bx+c$ می‌دانیم که $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ و $Max=|a|+c$ و $Min=-|a|+c$ است.

$$T=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}\to\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\to |b|=۳\to b=۳,b=-۳$$

$$\begin{matrix}Max=۱\to |a|+c=۱\\ Min=-۳\to -|a|+c=-۳\end{matrix}\to c=-۱,|a|=۲\to a=۲,a=-۲$$

شکل فرمت سینوس را دارد یعنی $ab>۰$ است و بدون دانستن این موضوع هم گزینهٔ اول انتخاب می‌شد.

.35

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\to y=a+b\cos x$$

در تابع $y=a\cos bx+c$ می‌دانیم که $Max=|a|+c$ است.

$$Max=۳\to |b|+a=۳\xrightarrow[\text{پس } b<۰ \text{ است}]{\text{شکل فرمت قرینهٔ کسینوس را دارد}}-b+a=۳$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{۷\pi}{۳}\\ ۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}} ۰=a+b\cos(\frac{۷\pi}{۳})\to ۰=a+b\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۳})\to ۰=a+b\cos\frac{\pi}{۳}\to ۰=a+\frac{b}{۲}\to ۲a+b=۰$$

پس : $\begin{cases}-b+a=۳\\ ۲a+b=۰\end{cases}\to a=۱\ ,\ b=-۲$

.36

در تابع $y = a\sin bx + c$ می‌دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است.

$$T = \frac{9\pi}{2} - (\frac{-3\pi}{2}) = 6\pi \to \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \to |b| = \frac{1}{3} \to b = \frac{1}{3} \ , \ b = \frac{-1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} Max = 1 \to |a| + c = 1 \\ Min = -3 \to -|a| + c = -3 \end{array}\right\} \to c = -1 \ , \ |a| = 2 \to a = 2 \ , \ a = -2$$

چون شکل فرمت قرینهٔ سینوس را دارد پس $ab < 0$ است بنابراین $\frac{a}{b} = -6$ است.

.37

می‌دانیم در تابع $y = a\sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{3} \to |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow[\text{است، } b>0 \text{ است.}]{\text{چون شکل فرمت خود سینوس}} b + a = \sqrt{3}$$

نقطهٔ $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \to -\frac{3}{2} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \to -\frac{3}{2} = a - b\sin\frac{\pi}{3} \to -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \to -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$-2\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \to -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \to 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\to (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \to b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

.38

اختلاف max و min تابع ۱۰ واحد است. پس $|a| = 5$ خواهد بود. حال چون تابع از $x = 0$ نزولی شده، پس $a = 5$ است. همچنین تابع دو واحد پایین آمده است، پس $b = -2$ است.

$$f(x) = 5\cos x - 2 \xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} f(\frac{\pi}{3}) = 5\cos\frac{\pi}{3} - 2 = 5(\frac{1}{2}) - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

.39

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{2}} \ ; \ T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = 1 \\ y_{min} = -|a| + c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{4} \ ; \ bc = 4 \times \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{bc = 3}$$

.40

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a\sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x) = a\cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = ۲$

ازطرفی $y(۰) = ۲$، پس:

$$y(۰) = a \times \cos ۰ = a \Rightarrow a = ۲$$

همچنین نمودار تابع در بازهٔ $[-۲/۵, ۳/۵]$ سه بار تکرار شده است، درنتیجه:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶ \Rightarrow T = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

که هر دو مقدار قابل‌قبول است. باتوجه‌به گزینه‌ها، $a.b = ۲$ است.

.41

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$۱ - |a| = -۱ \Rightarrow |a| = ۲$$

تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$۲T = \frac{۴}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |b| = ۳$$

باتوجه‌به نمودار a و b هم‌علامت است؛ پس:

$$a + b = ۵ \text{ یا } - ۵$$

.42

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.

ب) دوره تناوب تابع $y = a - ۲\cos\left(bx + \frac{\pi}{۲}\right)$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

ج) داریم:

$$y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = a + ۲\sin bx$$

باتوجه‌به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.

د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{۱۸}, ۰\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین باتوجه‌به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |b| = ۳ \xrightarrow{b>۰} b = ۳$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{۱۸}\right) = ۰$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$۰ = a - ۲\cos\left(۳ \times \frac{\pi}{۱۸} + \frac{\pi}{۲}\right) = a - ۲\cos\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲}\right) = a + ۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = a + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

.43

دورهٔ تناوب تابع برابر π و ماکزیمم مقدار آن ۱/۵ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲ \quad (I)$$

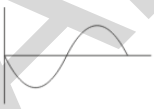
$$\text{ماکزیمم تابع} = ۱ + |a| = ۱/۵ \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۲} \quad (II)$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس نمودار با محور yها بزرگ‌تر از یک است.

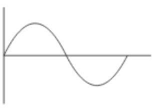
$$x = ۰ : y = ۱ + a\sin(\frac{-\pi}{۶}) = ۱ - \frac{a}{۲} > ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \xrightarrow{(II)} a = \frac{-۱}{۲}$$

باتوجه‌به اینکه ضریب $\sin$ در تابع منفی است و باتوجه‌به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = ۲$ قابل‌قبول است.

$$a + b = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$



نمودار y=-sinx



نمودار y=-sin(-x)

.44

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b = ۰\ , \quad f(۲) = ۴ \Rightarrow a + b\cos\pi = ۴ \Rightarrow a - b = ۴$$

$$\begin{cases} a + b = ۰ \\ a - b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۲\ , b = -۲$$

.45

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = \frac{۵}{۲} \\ y_{\min} = -|a| + c = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۲} \ , \ c = ۱$$

$$\Rightarrow y = ۱ + a\cos bx \ ; \ y(۰) = ۱ + a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

پس تابع به صورت $y = ۱ - \frac{۳}{۲}\cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac = \frac{-۳}{۲} \times ۱ = \frac{-۳}{۲}$$

.46

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = ۱ + a\sin bx\cos bx = ۱ + \frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{۳}{۲}$، مینیمم تابع $\frac{۱}{۲}$ و دورهٔ تناوب $\frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{\pi}{۴}) = \pi$ است. پس:

$$\begin{cases} ۱ + \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۳}{۲} \\ ۱ - \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

$$\frac{۲\pi}{|۲b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۱$$

باتوجه‌به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{۲}$ و $۲b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب $\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} a = -۱ \\ b = -۱ \end{cases}$ دارد، درنتیجه $a + b = ۲$ یا $a + b = -۲$ صحیح است.

.47

گام اول

الف) دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-۱ \leq \sin ax \leq ۱$

گام دوم

تابع $y = a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[۰, ۳]$، سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دورهٔ تناوب تابع است، پس:

$$۳T = ۳ - ۰ \Rightarrow ۳T = ۳ \Rightarrow T = ۱$$

بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow ۱ = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، داریم:

$$-۱ \leq \sin(b\pi x) \leq ۱ \Rightarrow -a \leq a\sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

طبق نمودار تابع $y_{\max} = ۳$ و $y_{\min} = -۳$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -۳$ خواهد بود.

ازطرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگ‌تر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -۳$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = ۲$

درنتیجه:

$$ab = (-۳) \times ۲ = -۶$$

48.

اولاً توجه کنید که باتوجه‌به نمودار، b و c هم‌علامت هستند. حال داریم:

$$T = \frac{۴\pi}{۳} + \frac{۲\pi}{۳} = ۲\pi = \frac{۲\pi}{|c|} \Rightarrow c = \pm ۱ \Rightarrow c = ۱$$

$$y_{\max} = ۱ \Rightarrow |b| + a = ۱ \xrightarrow{b>۰} b + a = ۱$$

$$O\Big|_{۰}^{۰} \Rightarrow ۰ = a + b\cos(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow ۲a + b = ۰ \Rightarrow a = -۱ \,,\, b = ۲$$

$$b(c-a) = ۲(۱+۱) = ۴$$

49.

دورهٔ تناوب تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|b|}$، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \quad (*)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $T = ۶$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{۱}{۳}$ و اگر a عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$، برابر با $a + c$ است، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow Max(y) = a \quad (**)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $Max(y) = ۲$، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = ۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{۷}{۳}$ نیز قابل‌قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

50.

گام اول

باتوجه‌به نمودار رسم‌شده مشخص است دورهٔ تناوب تابع برابر با ۴π است. دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|m|}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\frac{۲\pi}{|m|} = ۴\pi \Rightarrow |m| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = \pm\frac{۱}{۲}$$

با فرض $m = \frac{۱}{۲}$ تست را حل می‌کنیم (اگر $m = -\frac{۱}{۲}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد).

$$m = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow f(\frac{۱۶\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۸\pi}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۲} + ۲\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} + ۲\cos\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} + ۲(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

51.

$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۵ \\ \min = -|a| + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow c = ۳$$

.52

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T = 2(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}) = 2 \ , \ T = \frac{2\pi}{|b|} = 2$$
$$\Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b>0} b = \pi$$
$$f(\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow a\cos(\frac{\pi}{4} + c) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{4}$ است، پس:

$$|a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{4}$$
$$f(x) = \pm\frac{1}{4}\cos(\pi x + \frac{\pi}{4})$$
$$x = 0 : f(0) = \pm\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}$$

باتوجه‌به نمودار $f(0)$ باید مثبت باشد، پس:

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

.53

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ و $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$، معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$
$$\sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x = \sin^2\frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}} -\cos 2x = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

.54

روش اول:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4})) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(-x + \frac{\pi}{4})$$

$$\xrightarrow{\sin x = \sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x + \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi + x - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \pi \ \ \text{(با توجه به شرط) غ ق ق} \end{cases}$$

روش دوم: اگر $k = 0$ باشد گزینهٔ اول و دوم $x = 0$ را می‌دهند که در معادله صدق نمی‌کند اگر $k = 1$ باشد گزینهٔ سوم $x = \frac{\pi}{2}$ را می‌دهد که در معادله صدق نمی‌کند بنابراین گزینهٔ چهارم صحیح است.

.55

$$\cos 3x + \cos x = 0 \to \cos 3x = -\cos x \to \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\xrightarrow{\cos x=\cos\alpha \to x=2k\pi\pm\alpha} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \to 4x = 2k\pi + \pi \to x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \to 2x = 2k\pi - \pi \to x = k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد.

.56

از رابطه $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم.

$$2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2(2\cos^2 x - 1) = 4\frac{\cos x}{\sin x}\sin x + \cot x \cdot \tan x = 4\cos x + 1$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16+48}}{8} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{غ ق ق} \\ \dfrac{-1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

.57

$$\cos 3x + \cos x = 0 \to \cos 3x = -\cos x \to \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x = 2k\pi + \pi - x \to 4x = 2k\pi + \pi \to x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ \xrightarrow{x=2k\pi-\alpha} 3x = 2k\pi - \pi + x \to 2x = 2k\pi - \pi \to x = k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ قابل قبول است.

.58

می‌دانیم: $\boxed{1 + \cos 2a = 2\cos^2 a}$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \to \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \to 2\cos 2x = -1 \to \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\to \cos 2x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \to 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \to x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

.59

در هر سه پرانتز از اتحاد $۱+\cos A = ۲\cos^۲\frac{A}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$(۱+\cos ۲\alpha)(۱+\cos ۴\alpha)(۱+\cos ۸\alpha)=\frac{۱}{۸} \Rightarrow (۲\cos^۲\alpha)(۲\cos^۲ ۲\alpha)(۲\cos^۲ ۴\alpha)=\frac{۱}{۸}$$
$$\Rightarrow \cos^۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha\cos^۲ ۴\alpha=\frac{۱}{۶۴} \Rightarrow |\cos\alpha\cos ۲\alpha\cos ۴\alpha|=\frac{۱}{۸}$$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $|\sin\alpha|$ ضرب می‌کنیم:

$$|\sin\alpha\cos\alpha\cos ۲\alpha\cos ۴\alpha|=\frac{۱}{۸}|\sin\alpha|$$

حالا از اتحاد $\sin A\cos A=\frac{۱}{۲}\sin ۲A$ سه بار استفاده می‌کنیم:

$$|\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}\cos ۲\alpha}_{\frac{۱}{۴}\sin ۴\alpha}\cos ۴\alpha}_{\frac{۱}{۸}\sin ۸\alpha}|=\frac{۱}{۸}|\sin\alpha| \Rightarrow |\sin ۸\alpha|=|\sin\alpha| \Rightarrow \begin{cases}\sin ۸\alpha=\sin\alpha\\ \sin ۸\alpha=\sin(-\alpha)\end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و بزرگ‌ترین جواب هرکدام در بازهٔ $[۰,\pi]$ را می‌نویسیم:

$$۱)\ \sin ۸\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases}۸\alpha=۲k\pi+\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi}{۷} \Rightarrow \alpha_{\max}=\frac{۶\pi}{۷}\\ ۸\alpha=۲k\pi+\pi-\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi+\pi}{۹} \Rightarrow \alpha_{\max}=\frac{۷\pi}{۹}\end{cases}$$
$$۲)\ \sin ۸\alpha=\sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases}۸\alpha=۲k\pi-\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi}{۹} \Rightarrow \alpha_{\max}=\frac{۸\pi}{۹}\\ ۸\alpha=۲k\pi+\pi+\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{۲k\pi+\pi}{۷} \Rightarrow \alpha_{\max}=\frac{۵\pi}{۷}\end{cases}$$

تذکر: در جواب‌ها $\alpha=\pi$ را به خاطر ضرب طرفین در $\sin\alpha$ در نظر نگرفتیم. بنابراین بزرگ‌ترین جواب، $\frac{۸\pi}{۹}$ است.

.60

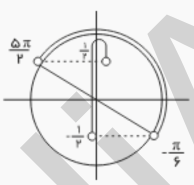
ابتدا حدود x را می‌یابیم:

$$-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{\times ۲} -\frac{\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۶}$$

با فرض $۲x=\alpha$ و استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin\alpha=\frac{m-۱}{۴},\ -\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$$

طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $-\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$، $\sin\alpha$ از $-\frac{۱}{۲}$ تا ۱ افزایش یافته و سپس تا $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابد، بنابراین در کل داریم:



$$-\frac{۱}{۲}<\sin\alpha\le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\le ۱ \xrightarrow{\times ۴} -۲<m-۱\le ۴ \xrightarrow{+۱} -۱<m\le ۵ \Rightarrow m\in(-۱,۵]$$

.61

اگر : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{matrix}\sin\alpha=\cos\beta \\ \tan\alpha=\cot\beta\end{matrix}$

$$(x+\frac{\pi}{8})+(\frac{3\pi}{8}-x)=\frac{\pi}{2} \to \sin(x+\frac{\pi}{8})=\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\cos(x-\frac{3\pi}{8})$$

$$\Rightarrow 2\sin(x+\frac{\pi}{8})=1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases} \xrightarrow{[0,2\pi]} \begin{matrix} x_1=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{24} \\ x_2=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{8}=\frac{17\pi}{24}\end{matrix} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{18\pi}{24}=\frac{3\pi}{4}$$

.62

می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a \ ,\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha}$

$$\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0 \to 2\sin x\cos x+\sin x=0 \to \sin x(2\cos x+1)=0$$

$$\to \begin{cases} \sin x=0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x=0,\pi,2\pi \\ 2\cos x+1=0 \to \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} \begin{cases} x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x=\frac{2\pi}{3} \\ x=2k\pi-\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x=\frac{4\pi}{3}\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $0+\pi+2\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=5\pi$ است.

.63

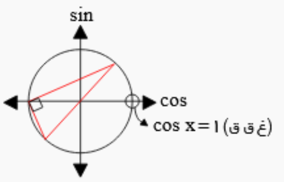
$$2\sin x\cos 2x+\sin x=1 \Rightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x)+\sin x=1$$
$$\Rightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=1 \Rightarrow \sin 3x=1 \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x\in\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{6}\}$$

مجموع جواب‌ها $\frac{15\pi}{6}$ یعنی $\frac{5\pi}{2}$ است.

.64

با توجه به این که $\cos x\neq 1$ (ریشه‌ی مخرج)، معادله‌ی مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=1-\cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x-\sin x\cos x=0 \Rightarrow \sin x(\sin x-\cos x)=0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=\pi \\ \text{یا} \\ \sin x\neq 0 \Rightarrow \cos x=\sin x \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

همان طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌کنید، نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی مفروض، رئوس یک مثلث قائم الزاویه هستند زیرا زاویه‌ی محاطی مقابل به قطر دارد.

.65

می‌دانیم $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ و $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$$
$$2\sin 2x\cos 2x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$$
$$\to 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 0 \to \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0$$
$$\cos 2x = 0 \to 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0\le x\le \pi} \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right\}$$
$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \to x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{0\le x\le \pi} \left\{\frac{11\pi}{12}\right\} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \to x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{0\le x\le \pi} \left\{\frac{7\pi}{12}\right\} \end{cases}$$
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

.66

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ x = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع} = \frac{9\pi}{4}$$

.67

راه‌حل اول:

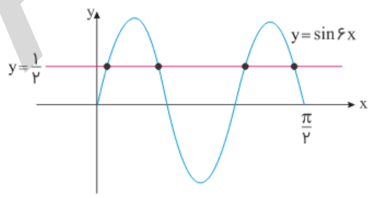
$$4\sin(3x)\cos(3x) = 1 \Rightarrow 2\sin(3x)\cos(3x) = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6})$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم:

$$4\sin(3x)\cos(3x) = 1 \Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2}$$
$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 6x \le 3\pi$$

باتوجه‌به شکل معادله چهار جواب دارد.



.68

$$(1-\cos^2 x)+\sin^2 x\cos 3x=0\Rightarrow \sin^2 x(1+\cos 3x)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ \cos 3x=-1\Rightarrow 3x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

جواب‌های بازه $[0,2\pi]$ برابر $\{0,\pi,2\pi,\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}\}$ است که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

.69

$$2\sin x\cos 2x+\sin x=1\Rightarrow 2\sin x(1-2\sin^2 x)+\sin x=1$$
$$\Rightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=1\Rightarrow \sin 3x=1\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x\in\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{9\pi}{6}\}$$

مجموع جواب‌ها $\frac{15\pi}{6}$ یعنی $\frac{5\pi}{2}$ است.

.70

$$\cos(\frac{16\pi}{8}+\frac{\pi}{8}+x)\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{8}+x)\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}-x)=\frac{1}{4}\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{8}+x)\sin(\frac{\pi}{8}+x)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{24}\Rightarrow x_1=-\frac{\pi}{24}$$
$$2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{24}\Rightarrow x_2=\frac{7\pi}{24}\Rightarrow S=\frac{7\pi}{24}-\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{4}$$

.71

طبق فرض داریم:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}\Rightarrow \cos^2 x=(1+\sin x)^2$$
$$\Rightarrow 1-\sin^2 x=1+\sin^2 x+2\sin x\Rightarrow 2\sin^2 x+2\sin x=0$$
$$\Rightarrow 2\sin x(\sin x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ 1+\sin x=0\quad \text{(چرا؟) غ ق ق}\end{cases}$$

جواب‌های معادله به‌صورت $k\pi$ هستند که فاصلهٔ هر دو جواب متوالی π است.

.72

$$2\cos(3x)=-2-5\sin^2 x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-2\le 2\cos(3x)\le 2\quad ,\quad -7\le -2-5\sin^2 x\le -2$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای ۲− برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases}2\cos(3x)=-2\Rightarrow \cos(3x)=-1\Rightarrow 3x=(2k-1)\pi\Rightarrow x=(2k-1)\frac{\pi}{3}\quad ,\ k\in\mathbb{Z}\\ -2-5\sin^2 x=-2\Rightarrow \sin^2 x=0\Rightarrow x=k'\pi\quad ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi\ ,\ \frac{-\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \pi\}\cap\{-\pi\ ,\ 0\ ,\ \pi\}=\{-\pi\ ,\ \pi\}$$

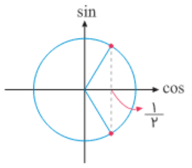
.73

$$\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{3}-x)=1\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-x))=1$$
$$\sin^2(x+\frac{\pi}{6})=1\Rightarrow\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{6})=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\\ \sin(x+\frac{\pi}{6})=-1\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

.74

$$۸\cos x-\tan^{۲}x=۱\Rightarrow ۸\cos x=۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$$

$$\Rightarrow \cos^{۳}x=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}$$



$x\in[۰,۲\pi]\Rightarrow$ دو جواب دارد

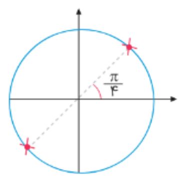
.75

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}).\cos(\frac{\pi}{۴}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}-x))=۱$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow \sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$\Rightarrow$ جواب‌ها : $\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\xrightarrow{\text{مجموع}}\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$



.76

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow\frac{۲\sin x\cos x}{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow ۲\sin^{۲}x=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$$

$$\Rightarrow ۳\sin^{۲}x=\cos^{۲}x$$

$$\Rightarrow \tan^{۲}x=\frac{۱}{۳}$$

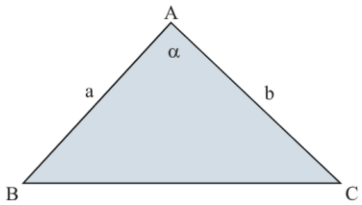
$$\Rightarrow \tan^{۲}x=\tan^{۲}\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

$$x=\frac{-۵\pi}{۶},-\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}$$

پس این معادله در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ دارای ۴ جواب است.

.77

نکته: در هر مثلث دلخواه رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}a\times b\times \sin\alpha$ برقرار است:



با استفاده از نکته بالا داریم:

$$S=۱۵=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۲\times \sin\alpha$$
$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases}\alpha_۱=۳۰\\ \alpha_۲=۱۵۰\end{cases}\Rightarrow \alpha_۲-\alpha_۱=۱۲۰^\circ=\frac{۲\pi}{۳}$$

.78

نکته: از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱)\cos^۲x=\frac{۱}{۱+\tan^۲x}\qquad ۲)\cos^۲x=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x\qquad ۳)\cos(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\sin(x)$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۱+\tan^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})}\xrightarrow{(۱)} f(x)=\frac{۲}{a}-b\cos^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})$$
$$\xrightarrow{(۲)} f(x)=\frac{۲}{a}-b(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲(cx-\frac{۳\pi}{۴}))\xrightarrow{(۳)} f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}(-\sin ۲cx)$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{b}{۲}\sin(۲cx)+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}$$

باتوجه‌به نمودار، تابع در همسایگی $x=۰$ صعودی است، بنابراین b و c باید هم‌علامت باشند.

فرض کنیم $b,c>۰$:

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲c|}=۹\pi\Rightarrow |c|=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{c>۰} c=\frac{۱}{۹}$$
$$y_{\max}=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\xrightarrow{b>۰} a=\frac{۱}{۳}\quad (۱)$$
$$y_{\min}=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\xrightarrow{b>۰} b=۶\quad (۲)$$

پس تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}x)$$
$$f(\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}\times\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{\pi}{۶})=۴/۵$$

اگر $b,c<۰$:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲c|}=۹\pi\Rightarrow |c|=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{c<۰} c=-\frac{۱}{۹}$$
$$y_{\max}=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\xrightarrow{b<۰} -\frac{b}{۲}+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\Rightarrow -b+\frac{۲}{a}=۶$$
$$y_{\min}=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\xrightarrow{b<۰}\frac{b}{۲}+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow\frac{۲}{a}=۰ \text{ غیر ممکن}$$

بنابراین این حالت اتفاق نمی‌افتد.

.79

$$\tan x + \cot x = 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos x \sin x} = 4 \Rightarrow \cos x \sin x = \frac{1}{4},$$

$$5\pi < 4x < 6\pi \xrightarrow{\div 4} \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < \cos x < 0 \rightarrow \sin x - \cos x < 0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{(1)} \sin x - \cos x = -\sqrt{1 - 2\cos x \sin x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x \sin x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x} = -0{,}8\sqrt{2}$$

.80

از نمودار مشخص است که $a(-b) > 0 \rightarrow ab < 0$ است.

$$\sin^2(\frac{\pi}{4} - bx) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2(\frac{\pi}{4} - bx)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2bx \Rightarrow y = -\frac{a}{2}\sin 2bx + \frac{a}{2} + c$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_{max} = |-\frac{a}{2}| + \frac{a}{2} + c = 1 \\ y_{min} = -|-\frac{a}{2}| + \frac{a}{2} + c = -2 \xrightarrow{\times -1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2|\frac{a}{2}| = 3 \rightarrow a = \pm 3,$$

$$T = \frac{15\pi}{4} - (-\frac{5\pi}{4}) = 5\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = 5\pi \Rightarrow b = \pm\frac{1}{5} \xrightarrow{ab<0} ab = -\frac{3}{5} = -0{,}6$$

.81

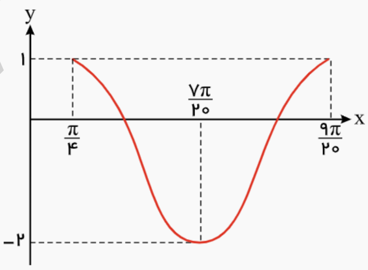
$$\cot(\frac{\pi + 4x}{2}) = \cot(\frac{\pi}{2} + 2x) = -\tan 2x\ ,\ \cos(\frac{\pi + 8x}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 4x) = -\sin 4x$$

$$-\tan 2x = -\sin 4x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2\sin 2x \cos 2x \Rightarrow \frac{\sin 2x(1 - 2\cos^2 2x)}{\cos 2x} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos^2 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} \\ 2x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{8} \end{array}\right. \Rightarrow a = x_1 - x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}; \\ \cos(3a) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \end{array}\right.$$

جوابی در بازهٔ داده‌شده برای این حالت وجود ندارد.

.82



$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5 \Rightarrow b = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow a\cos^2(5\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f(\frac{7\pi}{20}) = -2 \Rightarrow a\cos^2(5 \times \frac{7\pi}{20} - \frac{\pi}{4}) + c = -2 \Rightarrow c = -2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad \Rightarrow ab = 15$$

.83

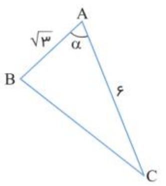
$$\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)=-\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)$$
$$\Rightarrow \sin ۴x+\cos ۲x=۰$$
$$\Rightarrow \cos ۲x(۱+۲\sin ۲x)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۱x=۰ \\ \sin ۲x=-۱/۲ \Rightarrow x=\frac{۷x}{۱۲}\ ,\ \frac{۱۱\pi}{۱۲} \end{cases}$$
$$\alpha=\frac{۱۱\pi}{۱۲}-\frac{۷\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۳}$$
$$\tan ۲\alpha=\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

.84

$$\tan x+\cot x=-۳\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-۳$$
$$\Rightarrow \frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}=-۳\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{-۱}{۳}$$
$$(\sin x+\cos x)^۲=۱+۲\sin x\cos x=۱+(۲\times(\frac{-۱}{۳}))=\frac{۱}{۳}$$
$$(\sin x+\cos x)=\pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}\xrightarrow{\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi}\sin x+\cos x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$
$$\frac{۱}{\sin^۳ x+\cos^۳ x}=\frac{۱}{(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)}$$
$$=\frac{۱}{(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})\times\frac{۴}{۳}}=-\frac{۳}{۴}\sqrt{۳}=-۰/۷۵\sqrt{۳}$$

.85

مثلث ABC را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



مساحت مثلث عبارت است از:

$$S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\times ۶\times\sin\alpha\Rightarrow ۴/۵=۳\sqrt{۳}\sin\alpha$$
$$\sin\alpha=\frac{۹}{۶\sqrt{۳}}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۱۸}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{۲\pi}{۳}\\ \alpha=\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}}=\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}}=۲$$

86.

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + \frac{1}{2}b\sin(2cx - \frac{3\pi}{2}) = a - \frac{b}{2}\sin(\frac{3\pi}{2} - 2cx)$$
$$\Rightarrow f(x) = a + \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

حال باتوجه‌به مقادیر max و min:

$$\begin{matrix} y_{max} = 3 \Rightarrow a + |\frac{b}{2}| = 3 \\ y_{min} = -1 \Rightarrow a - |\frac{b}{2}| = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ |\frac{b}{2}| = 2 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

نمودار بعد از $x = 0$ صعودی است، پس b منفی می‌باشد.

دورهٔ تناوب شکل برابر $T = \pi$ است، پس:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow c = \pm 1$$

ضابطهٔ تابع عبارت است از:

$$f(x) = 1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

مقادیر قابل‌قبول $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ هستند که:

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$