فصل ۵ :بانک سوالات کنکور " تابع "

.1

می‌دانیم که $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$ است. سوال در حقیقت $f^{-1}(۳)+f^{-1}(۱۵)$ را خواسته است.

$$f^{-1}(۳)=a \to f(a)=۳ \to a+۲\sqrt{a}=۳ \to a=۱$$
$$f^{-1}(۱۵)=b \to f(b)=۱۵ \to b+۲\sqrt{b}=۱۵ \to b=۹$$
$$\to a+b=۱۰$$

.2

چون g وارون تابع f است، پس باید $f^{-1}(-\frac{۳}{۷})+f^{-1}(\frac{۵}{۹})$ را پیدا کنیم. با فرض $f^{-1}(-\frac{۳}{۷})=a$ و $f^{-1}(\frac{۵}{۹})=b$ داریم:

۱ $f(a)=-\frac{۳}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۱+|a|}=-\frac{۳}{۷} \xrightarrow{a<۰} \frac{a}{۱-a}=\frac{-۳}{۷}$

$\Rightarrow ۷a=-۳+۳a \Rightarrow ۴a=-۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow f^{-1}(-\frac{۳}{۷})=-\frac{۳}{۴}$

۲ $f(b)=\frac{۵}{۹} \Rightarrow \frac{b}{۱+|b|}=\frac{۵}{۹} \xrightarrow{b>۰} \frac{b}{۱+b}=\frac{۵}{۹}$

$\Rightarrow ۹b=۵+۵b \Rightarrow ۴b=۵ \Rightarrow b=\frac{۵}{۴} \Rightarrow f^{-1}(\frac{۵}{۹})=\frac{۵}{۴}$

پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$f^{-1}(-\frac{۳}{۷})+f^{-1}(\frac{۵}{۹})=-\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

.3

تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است، پس:

$$f(x)=mx^۲-nx-k=\text{ثابت} \Rightarrow m=n=۰\ ,\ f(x)=-k$$

مجموعهٔ داده‌شده در صورتی تابع است که:

$$(\underbrace{m}_{۰}\ ,\ n-۱)=(۰\ ,k) \Rightarrow k=n-۱=-۱$$

پس $f(x)=۱$ و در نتیجه $f(\sqrt{۵})=۱$.

.4

چون f و g تابع ثابت هستند، در ضابطهٔ داده شده برای آن‌ها، ضریب x باید صفر باشد.

$$f(x)=b-۳ax \Rightarrow ۳a=۰ \Rightarrow a=۰ \Rightarrow f(x)=b$$
$$g(x)=c-(۳b-۳)x \Rightarrow ۳b-۳=۰ \Rightarrow b=۱ \Rightarrow \begin{cases} f(x)=۱ \\ g(x)=c \end{cases}$$
$$f+g=۵ \Rightarrow ۱+c=۵ \Rightarrow c=۴ \Rightarrow b\times c=۱\times۴=۴$$

5.

ابتدا ضابطه $g(x)$ را می‌یابیم.

$$f(x)=2x,\ gof(x)=5x^2+11 \Rightarrow g(f(x))=5x^2+11 \Rightarrow g(2x)=5x^2+11 \xrightarrow{x\to\frac{1}{2}x} g(2\times\frac{1}{2}x)=5(\frac{1}{2}x)^2+11$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{5}{4}x^2+11$$

حال تابع $g(x-7)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=g(x-7)=\frac{5}{4}(x-7)^2+11$$

در تابع فوق به ازای $x=7$، کمترین مقدار تابع به‌دست می‌آید.

$$y_{min}=g(7)=0+11=11$$

6.

می‌دانیم که $f(a)=b\to f^{-1}(b)=a$ است. سؤال در حقیقت $f^{-1}(6)+f^{-1}(12)$ را خواسته است.

$$\begin{array}{l} f^{-1}(6)=a\to f(a)=6\to a+\sqrt{a}=6\to a=4 \\ f^{-1}(12)=b\to f(b)=12\to b+\sqrt{b}=12\to b=9 \end{array} \to a+b=13$$

7.

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$، ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(6)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}\Rightarrow y=\sqrt[3]{2x}\xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^3=2x\Rightarrow x=\frac{y^3}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{2}$$

$$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}\Rightarrow g(x)=\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$6=\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^3}{2}}\Rightarrow 4+2=\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^3}{2}}\Rightarrow\frac{x^3}{2}=4\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

نقطهٔ $(2,6)$ در ضابطهٔ $g(x)$ صدق می کند، پس نقطهٔ $(6,2)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(6)=2$ است.

8.

ضابطهٔ $f^{-1}(\sin x)$ از ما خواسته شده است. ابتدا باید ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطهٔ $f^{-1}(\sin x)$ را به دست آوریم.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow y\sqrt{1+x^2}=x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2(1+x^2)=x^2\Rightarrow y^2+y^2x^2=x^2\Rightarrow x^2-y^2x^2=y^2$$

$$\Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}\xrightarrow{\text{هم علامت } y,x} x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ;-1<x<1$$

ضابطهٔ $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\xrightarrow{1-\sin^2x=\cos^2x} f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{|\cos x|}$$

.9

$$f(\frac{۱}{۲})=۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۱=\sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}} \Rightarrow ۲^{\frac{a}{۲}+b}=۱ \Rightarrow \frac{a}{۲}+b=۰ \Rightarrow b=-\frac{a}{۲}(*)$$

$$f^{-۱}(۸)=۵ \Rightarrow f(۵)=۸ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۸=\sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}$$

$$۲^{۵a+b}=۲^{۹} \Rightarrow ۵a+b=۹ \xrightarrow{(*)} ۵a-\frac{a}{۲}=۹ \Rightarrow \frac{۹a}{۲}=۹ \Rightarrow a=۲ \xrightarrow{(*)} b=-۱$$

در آخر داریم:

$$a-b=۲-(-۱)=۳$$

.10

در توابع شامل قدر مطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. باتوجه‌به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق، ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده به دست می‌آوریم. سپس هرکدام از ضابطه‌ها را که یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر بود انتخاب کرده و ضابطهٔ تابع معکوس را مشخص می‌کنیم.

$$f(x)=۲x-|۴-۲x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>۲ \Rightarrow ۴-۲x<۰ \Rightarrow |۴-۲x|=۲x-۴ \Rightarrow f(x)=۲x-۲x+۴=۴ \\ x\le ۲ \Rightarrow ۴-۲x\ge ۰ \Rightarrow |۴-۲x|=۴-۲x \Rightarrow f(x)=۲x-۴+۲x=۴x-۴ \end{cases}$$

ضابطهٔ $f(x)=۴$ یک‌به‌یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازهٔ $(-\infty,۲]$ معکوس‌پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$x\in(-\infty,۲] \Rightarrow x\le ۲ \Rightarrow ۴x\le ۸ \Rightarrow ۴x-۴\le ۴ \Rightarrow f(x)\le ۴$$

برد تابع f بازهٔ $(-\infty,۴]$ به دست آمد. پس دامنهٔ $f^{-۱}$ نیز بازهٔ $(-\infty,۴]$ خواهد بود.

$$y=۴x-۴ \Rightarrow y+۴=۴x \Rightarrow x=\frac{y+۴}{۴} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۴}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱ \quad ; x\le ۴$$

.11

$$f(۰)=۰ \Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^{۰}=۰ \Rightarrow a+b=۰ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(-۱)=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۱ \Rightarrow a+b(\frac{۱}{۲})^{-۱}=-۱$$
$$\Rightarrow a+۲b=-۱ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} a+b=۰ \\ a+۲b=-۱ \end{cases} \Rightarrow b=-۱,\ a=۱$$

$$a-b=۱-(-۱)=۲$$

.12

نمودار $f(x)=۲+۲^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x)=-x^{۲}-۳x+۸$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f^{-۱}(۱۰)=-۱$ باشد، مقدار $۲b-a$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۲

۳) ۳-   ۴) ۲-

$$\left.\begin{array}{l} x=۱ \Rightarrow -۱-۳+۸=۲+۲^{b-a} \Rightarrow ۲^{b-a}=۲ \Rightarrow b-a=۱ \\ f(-۱)=۱۰ \Rightarrow ۲+۲^{b+a}=۱۰ \Rightarrow b+a=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b=۲ \\ a=۱ \end{array} \Rightarrow ۲b-a=۳$$

.13

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

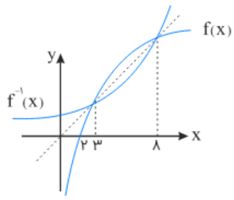
الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

دامنهٔ تابع $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x-f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

$$x-f^{-1}(x)\geq 0 \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y=x$) قرینهٔ هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار می گیرد و برعکس.



در بازهٔ $[3,8]$ نمودار تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار $y=f^{-1}(x)$ پایین خط $y=x$ قرار گرفته و درنتیجه $x-f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازهٔ $[3,8]$ دامنهٔ تعریف تابع داده‌شده است.

.14

برای حل این تست از دو روش استفاده می کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطهٔ تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست ها است. اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطهٔ مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه های اول و دوم، نقطهٔ جدید در ضابطهٔ تابع معکوس صدق می کند یا خیر.

روش اول:

$$y=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0 \Rightarrow 0\leq y<1\\ \dfrac{x}{1-x} & x<0 \Rightarrow -1<y<0\end{cases}$$

$$y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x(1-y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow y-yx=x\Rightarrow x(1+y)=y\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع معکوس به صورت $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}\ ,\ |x|<1$ درمی‌آید

روش دوم:

نقطهٔ $(0,0)$ در ضابطهٔ تابع اصلی صدق می کند. از بین گزینه ها تنها معادله ای که $x=0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطهٔ $(0,0)$ هم در ضابطهٔ آن صدق کند، ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

.15

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x>0$ و $x<0$، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه های جدید، ضابطهٔ معکوس تابع را به دست می آوریم. داریم:

$$x\neq 0: y=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\Rightarrow\begin{cases}x>0: |x|=x\Rightarrow y=\sqrt{x}\ ;\ y>0\\ x<0: |x|=-x\Rightarrow y=-\sqrt{-x}\ ;\ y<0\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y>0} y^2=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2\ ,\ x>0$$

$$y=-\sqrt{-x}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x,y<0} y^2=-x\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2, x<0$$

همچنین نقطهٔ $(0,0)$ باید در ضابطهٔ وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطهٔ معکوس تابع به صورت $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ در می آید.

روش دوم:

اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ صدق می کند. نقطهٔ $A(4,2)$ در ضابطهٔ $f(x)$ صدق می کند. پس نقطهٔ $B(2,4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعهٔ اعداد حقیقی یا همان $\mathbb{R}$ باشد.

تنها گزینه ای که تمام این ویژگی ها را دارد، گزینهٔ $y=x|x|\ ;\ x\in\mathbb{R}$ است.

.16

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون از روی ضابطهٔ تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-۱}(x)$ و به جای y، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y = ۲ - \sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت است}} x \geq ۱$$
$$\Rightarrow x-۱ \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x-۱} \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱} \leq ۲ \Rightarrow y \leq ۲ \Rightarrow R_f = (-\infty\,,\,۲] \Rightarrow D_{f^{-۱}} = (-\infty\,,\,۲]$$

اکنون ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = ۲ - \sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱} = ۲-y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-۱ = (۲-y)^۲$$
$$\Rightarrow x-۱ = ۴-۴y+y^۲ \Rightarrow x = ۵-۴y+y^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^۲-۴x+۵$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $y = x^۲-۴x+۵\,;\ x \leq ۲$ است.

.17

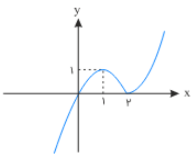
برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می کنیم $x \geq ۲$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < ۲$ باشد و ضابطهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه‌به این نکته که $D_{f^{-۱}} = R_f$، دامنهٔ تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطهٔ آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-۲| = \begin{cases} x \geq ۲ \Rightarrow |x-۲| = x-۲ \Rightarrow y = x(x-۲) \\ x < ۲ \Rightarrow |x-۲| = -(x-۲) \Rightarrow y = -x(x-۲) \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲-۲x & ;x \geq ۲ \\ -x^۲+۲x & ;x < ۲ \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازهٔ $[۱\,,\,۲]$ است. برد تابع در این بازه $[۰\,,\,۱]$ است. پس $D_{f^{-۱}} = [۰\,,\,۱]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدودهٔ مشخص‌شده ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$۱ < x < ۲ \Rightarrow f(x) = -x^۲+۲x \Rightarrow y = -x^۲+۲x \Rightarrow -y = x^۲-۲x$$
$$\xrightarrow{+۱} ۱-y = x^۲-۲x+۱ \Rightarrow ۱-y = (x-۱)^۲ \Rightarrow x-۱ = \sqrt{۱-y}$$
$$\Rightarrow x = ۱+\sqrt{۱-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱+\sqrt{۱-x}\,;\ ۰ \leq x \leq ۱$$

.18

$$y = |x+۱| - |۳x-۶|$$
$$\xrightarrow[\text{بازه‌بندی}]{\text{حذف قدرمطلق}} y = \begin{cases} ۲x-۷ & ;x < -۱ \\ ۴x-۵ & ;-۱ \leq x < ۲ \\ -۲x+۷ & ;x \geq ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{نزولی}} y = -۲x+۷\,,\ x \geq ۲$$

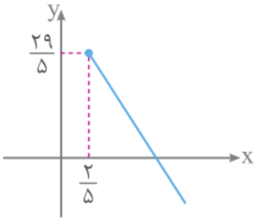
وارون تابع را می‌یابیم:

$$y = -۲x+۷ \Rightarrow ۲x = -y+۷ \Rightarrow x = \frac{-y}{۲}+\frac{۷}{۲}$$
$$\Rightarrow y^{-۱} = \frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\,,\ x \leq ۳$$

.19

ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=|۲x+۵|-|۵x-۲|$ می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۷ & ;x\leq -\frac{۵}{۲} \\ ۷x+۳ & ;-\frac{۵}{۲}<x<\frac{۲}{۵} \\ -۳x+۷ & ;x\geq \frac{۲}{۵} \end{cases} \xrightarrow{\text{نزولی}}$$



ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$ است. در ضمن چون بُرد تابع f در این بازه برابر $y\leq \frac{۲۹}{۵}$ است، پس دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ در این بازه به‌صورت $x\leq \frac{۲۹}{۵}$ است.

.20

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب $x^۳$ منفی باشد:

$$-۹+k^۲<۰ \Rightarrow k^۲<۹ \Rightarrow -۳<k<۳$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,\pm۱,\pm۲ \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k=۰$$

.21

$$x^۲\sqrt{x^۲}=x^۲|x|=\begin{cases} x^۳ & ;x\geq ۰ \quad \text{اکیداً صعودی} \\ -x^۳ & ;x<۰ \quad \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

پس باید وارون تابع ضابطهٔ پایینی را حساب کنیم:

$$y=-x^۳ \Rightarrow x^۳=-y \Rightarrow x=\sqrt[۳]{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}$$
$$D_f=R_{f^{-۱}}\,,\, D_{f^{-۱}}=R_f$$
$$R_f=[۰\,,+\infty]=D_{f^{-۱}} \Rightarrow D_{f^{-۱}}:x\geq ۰$$

.22

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(۲x^۴-۴x^۲-x^۴+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x	-۲	$-\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۲}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
f'	− ۰ + ت ن + ۰ − ۰ + ۰ − ت ن − ۰ +								

در چهار بازه، تابع اکیداً نزولی است.

.23

اگر $x\geq ۰$ باشد:

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+x \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱\geq ۰ \Rightarrow x\neq ۰ \quad (۱)$$

اگر $x<۰$ باشد:

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱\geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}\geq ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}\leq ۱$$
$$\Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱ \xrightarrow{\cap(x<۰)} -۱\leq x<۰ \quad (۲)$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $(۰,+\infty)\cup[-۱,۰)$ است، اما جواب درست $[-۱\,,+\infty)$ است، زیرا $x=۰$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

.24

راه حل اول:

$$5^x = 10 \Rightarrow x = \log_5 10 = \log_5 (2 \times 5) = \log_5 2 + \log_5 5$$
$$\Rightarrow x = \log_5 2 + 1 \Rightarrow \log_5 2 = x - 1$$
$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = \frac{\log_5 20}{\log_5 2} = \frac{\log_5 (4 \times 5)}{\log_5 2}$$
$$= \frac{\log_5 (2^2 \times 5)}{\log_5 2} = \frac{2\log_5 2 + \log_5 5}{\log_5 2} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

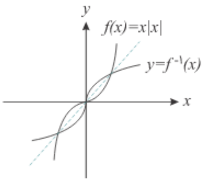
راه حل دوم:

$$\log_5 2 = x - 1$$
$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = \log_5 (2^2 \times 5)$$
$$= 2\log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

.25

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار f^{-1} قرینهٔ $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



.26

گام اول

می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ در ضابطهٔ تابع صدق کند، نقطهٔ به مختصات $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطهٔ وارون تابع صدق می‌کند.

گام دوم

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (4,2) \in f \Rightarrow (2,4) \in f^{-1}$$

با استفاده از این نقطه گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب تست باشند.

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow (-4,-2) \in f \Rightarrow (-2,-4) \in f^{-1}$$

باتوجه‌به این دو مثال ضابطهٔ وارون تابع به صورت $f^{-1}(x) = x\,|x|$ خواهد بود.

.27

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x + 1 \Rightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in D \\ x = -2 \notin D \end{cases}$$

پس نقطهٔ تلاقی f و f^{-1} نقطهٔ $(1,1)$ است و فاصلهٔ آن از مبدأ $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ خواهد شد.

.28

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به‌صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینهٔ خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$3y - 4 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y-4}{2}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2$$

.29

$y=-x\ ;\ x<0$: نیمساز ناحیهٔ دوم

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x)=-x\Rightarrow f(-x)=x$$
$$\Rightarrow -x+\frac{1}{2x}=x\Rightarrow \frac{1}{2x}=2x\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\xrightarrow{x<0}x=-\frac{1}{2}$$

.30

$$(a,b)\in f(x)\Rightarrow (b,a)\in f^{-1}(x)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y=x^3-x+1$ صدق دهیم.

گزینهٔ ۱ : $(-2)^3-(-2)+1\neq -1\ \ \times$

گزینهٔ ۲ : $(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})+1=\frac{5}{8}\ \ \checkmark$

گزینهٔ ۳ : $2^3-2+1\neq 1\ \ \times$

گزینهٔ ۴ : $(-\frac{11}{8})^3-(-\frac{11}{8})+1\neq -\frac{1}{2}\ \ \times$

.31

$$f(x)=x^2-2x-3=y\Rightarrow x^2-2x+1=y+4$$
$$\Rightarrow (x-1)^2=y+4\xrightarrow{\text{جذر}}|x-1|=\sqrt{y+4}$$
$$\xrightarrow{x\geq 1}x-1=\sqrt{y+4}\Rightarrow x=\sqrt{y+4}+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1$$

حال f^{-1} را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x+4}=x-11\quad (1)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x=21$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

.32

$y=-x\ ;\ x>0$: نیمساز ناحیهٔ چهارم

نمودار f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-1}(x)=-x\Rightarrow f(-x)=x\Rightarrow -x+\frac{2}{x}=x\Rightarrow 2x=\frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\xrightarrow{x>0}x=1$$

.33

فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

تابع داده‌شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط $y=x$ ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^3+3x-12=x\Rightarrow x^3+2x-12=0\Rightarrow x=2$$

حقیقتاً ریشهٔ $x=2$ را حدس زدیم!

$$x^3+3x-12=(x-2)(x^2+2x+6)$$

نقطهٔ $(2\,,2)$ محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

.34

ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow yx-۲y=x+۴\Rightarrow yx-x=۲y+۴$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴\Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}\Rightarrow y^{-۱}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

با مساوی قرار دادن ضابطهٔ تابع با وارون آن نقطهٔ تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲+\cancel{۴x}-\cancel{۴x}-۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow(x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=+۴\end{cases}$$

.35

اگر $(۹,-۲)$ روی وارون تابع باشد، $(-۲,۹)$ روی خود تابع قرار دارد:

$$-۳(-۲)^۳+۲(-۲)-۱۱=۲۴-۴-۱۱=۹$$

.36

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ است. $(۴,۲)\in fog$ است، یعنی $f(g(۴))=۲$ و $(۴,۱)\in gof$ است. یعنی $g(f(۴))=۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴))=۲$ و $g(f(۴))=۱$:

$$f(g(۴))=۲\xrightarrow{f(۳)=۲}g(۴)=۳\xrightarrow{(a,۳)\in g}a=۴$$
$$g(f(۴))=۱\xrightarrow{f(۴)=۵}g(۵)=۱\xrightarrow{(b,۱)\in g}b=۵$$

پس دوتایی مرتب (a,b) به صورت $(۴,۵)$ درمی‌آید.

.37

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(۳)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی‌تر می‌شود.) ضابطهٔ $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(۳)$ را می‌خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به‌دست‌آمده، مقدار $f(۳)$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

$$g(x)=۲x-۱\ ,\ fog(x)=\frac{x}{x-۳}\Rightarrow f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}$$
$$۲x-۱=۳\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\xrightarrow[x=۲]{f(۲x-۱)=\frac{x}{x-۳}}f(۳)=\frac{۲}{۲-۳}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

.38

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = ۵$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفهٔ دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفهٔ اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطهٔ تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = ۵$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهندهٔ تابع g، زوج مرتب $(۶,۵)$ دارای مؤلفهٔ دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = ۶$. حال با داشتن ضابطهٔ $f(x)$، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=۶} a + \sqrt{a} = ۶$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $\sqrt{a} = t$، معادله را به یک معادلهٔ درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود.)

$$a + \sqrt{a} = ۶ \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^۲ + t = ۶ \Rightarrow t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t+۳)(t-۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۳ & \text{غ ق ق} \\ t = ۲ \Rightarrow \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = ۴$ جواب تست می شود.

.39

گام اول

در ضابطهٔ $g(x)$، به‌جای x ضابطهٔ $f(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right) = \frac{۲ \times \frac{۲x-۱}{x+۱} + ۲}{۲ - \frac{۲x-۱}{x+۱}}$$
$$= \frac{\frac{۴x - ۲ + ۲x + ۲}{x+۱}}{\frac{۲x + ۲ - ۲x + ۱}{x+۱}} = \frac{۶x}{۳} = ۲x \Rightarrow g(f(x)) = ۲x$$

.40

$$f(x) = y = (\sqrt{x} - ۱)^۲ \Rightarrow |\sqrt{x} - ۱| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq ۱} \sqrt{x} - ۱ = \sqrt{y}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + ۱ \Rightarrow x = (\sqrt{y} + ۱)^۲$$
$$\Rightarrow g(x) = f^{-۱}(x) = (\sqrt{x} + ۱)^۲$$
$$(gog)(۱) = g(g(۱)) = g(۴) = ۹$$

.41

تست ضابطهٔ $f(f(x))$ یا همان $fof(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(f(x))$، ابتدا باید ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه‌به آن، ضابطهٔ $fof(x)$ را تعیین کنیم.

ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x)=2-|x-2|=\begin{cases} x\geq 2: x-2\geq 0 \Rightarrow f(x)=2-x+2=4-x \\ x<2: x-2<0 \Rightarrow f(x)=2+x-2=x \end{cases}$$

ضابطهٔ $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x\geq 2: f(f(x))=2-|4-x-2|=2-|2-x|$$
$$\xrightarrow[2-x<0]{x\geq 2} f(f(x))=2+2-x=4-x=f(x)$$
$$x<2: f(f(x))=2-|x-2| \xrightarrow[x-2<0]{x<2} 2+x-2=x \Rightarrow f(f(x))=f(x)$$

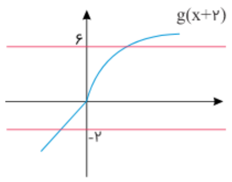
در هر دو حالت ضابطهٔ $f(f(x))$ برابر ضابطهٔ $f(x)$ شد.

.42

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$fofof(\sqrt{2})=f(f(f(\sqrt{2})))$$
$$f(\sqrt{2})=\frac{(\sqrt{2})(\sqrt{2})}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{(\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})}{3(\frac{1}{\sqrt{2}})-\sqrt{2}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$
$$f(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow fofof(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

.43



$$f(g(x+2))=2 \Rightarrow |\frac{1}{2}g(x+2)-1|=2$$
$$\frac{1}{2}g(x+2)-1=2 \Rightarrow g(x+2)=6$$
$$\frac{1}{2}g(x+2)-1=-2 \Rightarrow g(x+2)=-2$$

دو ریشه دارد.

.44

توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را برابر می‌گذاریم:

$$fog(x)=f(x+4)=\frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2}=\frac{2x+7}{x+6}$$
$$gof(x)=g(\frac{2x-1}{x+2})=\frac{2x-1}{x+2}+4=\frac{2x-1+4x+8}{x+2}=\frac{6x+7}{x+2}$$
$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{2x+7}{x+6}=\frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow (2x+7)(x+2)=(6x+7)(x+6)$$
$$\Rightarrow 2x^2+4x+7x+14=6x^2+36x+7x+42$$
$$\Rightarrow 4x^2+32x+28=0 \xrightarrow{\div 4} x^2+8x+7=0$$
$$\Rightarrow (x+7)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ x=-1 \end{cases}$$

45.

در تست حاصل مقادیری از دو تابع fog و gof از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطهٔ $f(x)$ و $g(x)$، ابتدا ضابطهٔ توابع $fog(x)$ و $gof(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$$
$$(fog)(x)=f(g(x))=|(x+۱)^{۲}|\xrightarrow{(x+۱)^{۲}\geq ۰}(fog)(x)=(x+۱)^{۲}$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=(|x|+۱)^{۲}$$

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲}+۱)^{۲}-(|۱-\sqrt{۲}|+۱)^{۲}=$$
$$(۲-\sqrt{۲})^{۲}-(\sqrt{۲}-۱+۱)^{۲}=۴-۴\sqrt{۲}+۲-(\sqrt{۲})^{۲}=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

46.

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به دست می آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می کنیم). سپس معادلهٔ $f^{-۱}(g(a))=۶$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می کنیم.

$$f(x)=۲x-۵\Rightarrow y=۲x-۵\Rightarrow y+۵=۲x\Rightarrow x=\frac{y+۵}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۵}{۲}$$
$$f^{-۱}(g(a))=۶\Rightarrow\frac{g(a)+۵}{۲}=۶\Rightarrow g(a)+۵=۱۲\Rightarrow g(a)=۷\xrightarrow{(۴,۷)\in g}a=۴$$

47.

داریم $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))$. ابتدا $g^{-۱}(-۹)$ را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $g^{-۱}(-۹)=a$ باشد، پس $g(a)=-۹$ و داریم:

$$g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow g(a)=\frac{۳-a}{۲}=-۹\Rightarrow ۳-a=-۱۸\Rightarrow a=۲۱$$

پس کافی است $f^{-۱}(۲۱)$ را حساب کنیم. فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۲۱)=b$ باشد، پس $f(b)=۲۱$ است و داریم:

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۹\Rightarrow f(b)=b^{۲}-۴b+۹=۲۱\Rightarrow b^{۲}-۴b-۱۲=۰$$
$$\Rightarrow(b-۶)(b+۲)=۰\xrightarrow{b\geq ۲}b=۶$$

پس $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)=۶$ است.

48.

داریم: $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)=g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))$، پس کافی است $f^{-۱}(۲۰)$ را یافته و در تابع $g^{-۱}$ قرار دهیم.

فرض کنیم $f^{-۱}(۲۰)=a$ باشد، پس $f(a)=۲۰$ است و داریم:

$$f(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow f(a)=a+\sqrt{a}=۲۰\Rightarrow a=۱۶$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(۲۰)=۱۶$$

بنابراین $g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=g^{-۱}(۱۶)$. حال فرض می‌کنیم $g^{-۱}(۱۶)=b$، پس $g(b)=۱۶$ است. درنتیجه:

$$g(x)=\frac{۹x+۶}{۱-x}\Rightarrow g(b)=\frac{۹b+۶}{۱-b}=۱۶\Rightarrow ۹b+۶=۱۶-۱۶b$$
$$\Rightarrow ۲۵b=۱۰\Rightarrow b=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵}$$
$$\Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=g^{-۱}(۱۶)=\frac{۲}{۵}$$

.49

$$gog(\circ) = g(g(\circ)) = g(۲) = ۳$$
$$gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$، ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(\circ) = -۳ \\ f(۲) = \circ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\circ - (-۳)}{۲ - \circ} = \frac{۳}{۲}$$
$$y - \circ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$
$$f^{-۱}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) \quad (*)$$

حال به بررسی ضابطهٔ g برای $x \le ۱$ می‌پردازیم:

$$g(\circ) = ۲\,,\ g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱ - ۲}{۱ - \circ} = -۱$$
$$y - ۱ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲\,;\ x \le ۱$$
$$\Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$
$$gof^{-۱}(-۲) \times gog(\circ) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

.50

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۲\ ; & x \le \circ \\ -x + ۲\ ; & x \ge \circ \end{cases} \quad , \quad g(x) = -۲x - ۲\ ;\ f(f(-۲)) = f(۶) = -۴$$

$$x \ge \circ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -x + ۲\ ;\ g(f^{-۱}(-۲)) = g(۴) = -۱\circ \quad ; \quad \boxed{g(f^{-۱}(-۲)) + f(f(-۲)) = -۱۴}$$

.51

$$f^{-1} = \{ (2,1), (3,2), (5,4), (4,3) \}$$
$$g^{-1} = \{ (1,2), (2,3), (4,5) \}$$
$$g^{-1}of^{-1} = \{ (2,2), (3,3), (5,5) \}$$

.52

$$g^{-۱}of^{-۱}(a) = g^{-۱}(f^{-۱}(a)) = ۸ \Rightarrow (f^{-۱}(a), ۸) \in g^{-۱}$$
$$\Rightarrow (۸, f^{-۱}(a)) \in g \Rightarrow g(۸) = f^{-۱}(a) \quad (*)$$
$$g(x) = \sqrt{۵x + ۹} \Rightarrow g(۸) = \sqrt{۴۹} \Rightarrow g(۸) = ۷$$
$$\xrightarrow{(*)} f^{-۱}(a) = ۷ \Rightarrow (a, ۷) \in f^{-۱} \Rightarrow (۷, a) \in f \Rightarrow a = ۳$$

.53

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-1} = \{(-۱,۲),(۴,-۱),(-۲,۳),(-۳,-۴)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > ۰$، مثبت و به ازای مقادیر $x < ۰$، منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -۲ \Rightarrow \sqrt{-a} = ۲ \Rightarrow a = -۴$$

.54

$$g^{-1} = \{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

حال $g^{-1}of$ را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g^{-1}} ۴ \\ ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۴ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g^{-1}} ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-1}of = \{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-1}of$ باشد. خواستهٔ مسئله $h - f$ است که باید در دامنهٔ مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{۱,۴\}$$
$$h - f = \{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\} = \{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{۲,-۱\}$ است.

.55

گام اول

الف) ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یعنی $f(g(x))$، با جایگذاری ضابطهٔ $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می آید.

ب) می خواهیم نمودار تابع $fog(x)$ زیر محور xها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < ۰$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$fog(x) = f(g(x)) = \left(\frac{۱}{۲}(x-۳)\right)^۲ + \frac{۱}{۲}(x-۳) - ۲ = \frac{۱}{۴}(x-۳)^۲ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} - ۲$$
$$= \frac{۱}{۴}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۴} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۷}{۲} = \frac{۱}{۴}x^۲ - x - \frac{۵}{۴}$$

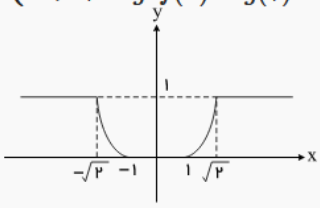
حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < ۰$ را تعیین می کنیم:

$$fog(x) < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}x^۲ - x - \frac{۵}{۴} < ۰ \xrightarrow{\times ۴} x^۲ - ۴x - ۵ < ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰ \Rightarrow x \in (-۱,۵)$$

.56

ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x < -1 \ : \ gof(x) = g(-1) = 0 \\ -1 \le x \le : \ gof(x) = g(x) = 1 - x^2 \\ x > 1 \ : \ gof(x) = g(1) = 0 \end{cases}$$



$$fog = f(1-x^2) = \begin{cases} -1 & 1 - x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -1 \le 1 - x^2 \le x \Rightarrow 1 \ge x^2 - 1 \ge -1 \ge -1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ 1 & 1 - x^2 > 1 \Rightarrow x^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x) = \begin{cases} -1 & x < -\sqrt{7} x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \end{cases}$$

$$x < -\sqrt{2} \Rightarrow gof(x) - fog(x) = 0 - (-1) = 1 \ , \ -\sqrt{2} \le x < -1 \Rightarrow gof(x) - fog(x) = 0 - (1 - x^2) = x^2 - 1$$

$$-1 \le x \le 1 \Rightarrow gof(x) - fog(x) = 1 - x^2 - (1 - x^2) = 0 \ , \ 1 < x \le \sqrt{2} \Rightarrow gof(x) - fog(x) = 0 - (1 - x^2)$$
$$= x^2 - 1$$

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow gof(x) - fog(x) = 0 - (-1) = 1$$

در نمودار $gof - fog$ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است.

.57

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} 2x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطهٔ f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحلهٔ دوم $f(x)$ وارد ضابطهٔ g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = 2x$ است.

گام دوم

ضابطهٔ $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطهٔ $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 3x + 4 \ , \ g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

.58

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطهٔ تابع $gof(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جملهٔ "مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محورxها قرار بگیرد باید مقدارy تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطهٔ $gof(x)$ و حل نامعادلهٔ $gof(x) > ۰$:

$$g(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۲\ ,\ f(x) = x^۲ + ۳x$$
$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{۱}{۲}(x^۲ + ۳x) + ۲ = -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲$$
$$gof(x) > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۲)} x^۲ + ۳x - ۴ < ۰$$
$$\Rightarrow (x+۴)(x-۱) < ۰ \Rightarrow -۴ < x < ۱$$

بنابراین در بازهٔ $(-۴, ۱)$ مقادیر تابع $gof(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور xها قرار می گیرد.

.59

$$y = (g^{-۱}of^{-۱})(x) = (fog)^{-۱}(x) \xrightarrow[A\left|\begin{matrix}۰\\ \alpha\end{matrix}\right.]{\text{محل تلاقی با محور } y \text{ ها}} y = (fog)(x)$$

$$\xrightarrow[A'\left|\begin{matrix}\alpha\\ ۰\end{matrix}\right.]{\text{نقطهٔ موردنظر}} \log(۲g - ۵) = ۰ \Rightarrow ۲g - ۵ = ۱۰^۰ \Rightarrow ۲g = ۶ \Rightarrow g = ۳$$

$$g = ۳ \Rightarrow \alpha + \sqrt{۲\alpha - ۴} = ۳ \xrightarrow[\alpha \le ۳]{۳-\alpha \ge ۰} ۲\alpha - ۴ = ۹ + \alpha^۲ - ۶\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۳ = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۱۳}}{۱} \Rightarrow \alpha = ۴ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۴ - \sqrt{۳}$$

.60

$$f(۶) = f(-\frac{۱}{۴}) = ۰$$

$$f(g(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x) = ۶ \\ g(x) = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = ۶ \\ x - \sqrt{x} = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - ۶ = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۲) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۳ \xrightarrow{x=t^۲} x = ۹$$
$$x - \sqrt{x} + \frac{۱}{۴} = ۰ \xrightarrow{t=\sqrt{x}>۰} t^۲ - t + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow (t - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=t^۲} x = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع fog، محور xها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند.

.61

برای تعیین نقطهٔ تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطهٔ fog مشخص شود. سپس معادلهٔ $f(x) = fog(x)$ را حل کرده و نقطهٔ تلاقی دو تابع که در واقع ریشهٔ همین معادله است را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = (۲x - ۳)^۲ \ , \ g(x) = x + ۲ \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = (۲g(x) - ۳)^۲$$
$$= (۲(x+۲) - ۳)^۲ = (۲x + ۴ - ۳)^۲ = (۲x+۱)^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

معادلهٔ $f(x) = fog(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = fog(x) \Rightarrow (۲x - ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ \Rightarrow ۱۶x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه‌ای به طول $x = \frac{۱}{۲}$ باهم متقاطع‌اند.

دقت کنید که:

$$D_f = \mathbb{R} \ , \ D_{fog} = \mathbb{R}$$

.62

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$
$$x^۲ - ۱۵x > ۰ \Rightarrow x(x - ۱۵) > ۰ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)$$
$$D_{fog} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$
$$= \left\{ x | \underbrace{x \in (-\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)}_{(*)}, \log(x^۲ - ۱۵x) \leq ۲ \right\}$$
$$\log(x^۲ - ۱۵x) \leq \log_{۱۰}^{۱۰۰} \Rightarrow x^۲ - ۱۵x \leq ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۵x - ۱۰۰ \leq ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۲۰)(x + ۵) \leq ۰ \Rightarrow x \in [-۵, ۲۰] \ (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**),(*)} x \in [-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$$

.63

گام اول

دامنهٔ تابع fog از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

گام دوم

دامنهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطهٔ گفته‌شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^۲ + x + ۲}}$$

$$-x^۲ + x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱) < ۰$$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \Rightarrow D_f = (-۱, ۲)$$

$$g(x) = (\frac{۱}{۴})^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} | -۱ < (\frac{۱}{۴})^x < ۲\}$$

$$\xrightarrow{(\frac{۱}{۴})^x > ۰} (\frac{۱}{۴})^x < ۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x < ۲ \Rightarrow ۲^{-۲x} < ۲ \Rightarrow -۲x < ۱$$

$$\xrightarrow{\div -۲} x > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D_{fog} = (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

.64

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطهٔ $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$، دامنهٔ تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3 - x} \Rightarrow 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_2 (x^2 + 2x) \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$
$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) | \log_2 (x^2 + 2x) \leq 3\}$$
$$\log_2 (x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$
$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{fog} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

.65

در صورت مسئله ضابطهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع fog کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = 2x + 3 \;,\; g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$
$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t-3}{2}$$
$$g(t) = 8(\frac{t-3}{2})^2 + 22(\frac{t-3}{2}) + 20 \Rightarrow g(t) = 8(\frac{t^2 - 6t + 9}{4}) + 11(t - 3) + 20$$
$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حالا ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می کنیم:

$$f(x) = 2x + 3 \;,\; g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$
$$\Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

.66

راه‌حل اول:

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 : \; f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3$$

فقط در گزینهٔ "۴"، $f(-1) = 3$ است.

راه‌حل دوم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(t) = 4(\frac{t+3}{2})^2 - 14(\frac{t+3}{2}) + 13$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

.67

ضابطهٔ $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطهٔ تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=x^{۲}-x-۲\ ,\ f(g(x))=x^{۲}+x-۲$$
$$\Rightarrow (g(x))^{۲}-g(x)-۲=x^{۲}+x-۲\Rightarrow (g(x))^{۲}-g(x)=x^{۲}+x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^{۲}-g(x)=x^{۲}+x\xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{۱}{۴} \text{ اضافه می کنیم}}(g(x))^{۲}-g(x)+\frac{۱}{۴}=x^{۲}+x+\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow (g(x))-\frac{۱}{۲})^{۲}=(x+\frac{۱}{۲})^{۲}\Rightarrow g(x)-\frac{۱}{۲}=\pm(x+\frac{۱}{۲})$$

پس برای ضابطهٔ $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱)\ \ g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=x+۱$$
$$\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^{۲}-x-۲+x+۱=x^{۲}-۱$$
$$۲)\ \ g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=-x$$
$$\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^{۲}-x-۲-x=x^{۲}-۲x-۲$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینهٔ ۱ قابل قبول است.

.68

دو تابع $g\,(x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=۸x^{۲}+۶x+۵\quad\Rightarrow\quad f\,(۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵\qquad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطهٔ تابع $f\,(x)$ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $t=۲x+۱$ باشد، x را برحسب t به‌دست آورده و در ضابطهٔ (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$۲x+۱=t\ \ \Rightarrow ۲x=t-۱\Rightarrow\ x=\frac{t-۱}{۲}$$
$$f\,(۲x+۱)=۸x^{۲}+۶x+۵\ \Rightarrow\ f\,(t)=۸\left(\frac{t-۱}{۲}\right)^{۲}+۶\left(\frac{t-۱}{۲}\right)+۵$$
$$=۲(t-۱)^{۲}+۳t-۳+۵$$
$$\Rightarrow\ f(t)=۲\left(t^{۲}-۲t+۱\right)+۳t+۲=۲t^{۲}-۴t+۲+۳t+۲=۲t^{۲}-t+۴$$

بنابراین ضابطهٔ $f\,(x)$ به‌صورت $f\,(x)=۲x^{۲}-x+۴$ است.

.69

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x-۳=t$، x را برحسب t به دست آورده و ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم.

$$f(x-۳)=x^{۲}-۴x+۵\xrightarrow[x=t+۳]{x-۳=t}f(t)=(t+۳)^{۲}-۴(t+۳)+۵$$
$$=t^{۲}+۶t+۹-۴t-۱۲+۵\Rightarrow f(t)=t^{۲}+۲t+۲\Rightarrow f(x)=x^{۲}+۲x+۲$$

ضابطهٔ $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطهٔ $f(۱-x)$ را مشخص می کنیم:

$$f(۱-x)=(۱-x)^{۲}+۲(۱-x)+۲=۱-۲x+x^{۲}+۲-۲x+۲$$
$$=x^{۲}-۴x+۵\Rightarrow f(۱-x)=x^{۲}-۴x+۵$$

روش دوم:روش دیگر برای به دست آوردن $f(۱-x)$ از روی ضابطهٔ $f(x-۳)$ این است که به جای x متغیر $۴-x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x-۳)=x^{۲}-۴x+۵\ \xrightarrow{x\to۴-x}\ f(۴-x-۳)=(۴-x)^{۲}-۴(۴-x)+۵$$
$$\Rightarrow f(۱-x)=۱۶-۸x+x^{۲}-۱۶+۴x+۵=x^{۲}-۴x+۵$$

70.

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
عبارت > 0		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

حال برای پیدا کردن دامنهٔ $f(3-x)$ کافی است $3-x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 3 \geq x \geq 1 \Rightarrow x \in [1,3]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطهٔ $f(3-x)$ را به‌دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

71.

گام اول

دامنهٔ تابع gof از رابطهٔ $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^2} \Rightarrow x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0,1]$$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} | \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0,1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \cup \{0\} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

72.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0\,,1]$$

$$D_{gof} : \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

همواره داریم $\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ ، درنتیجه:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2>0} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1,1]$$

.73

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{محور }y\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{2 واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+2}$ و $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2}=x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان 2}} -x+2=x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0$$

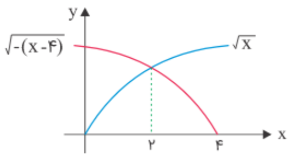
$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$x=-2$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در معادلهٔ $(*)$ صدق نمی‌کند.

.74

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور }y\text{ها}}\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{4 واحد به راست}}\sqrt{-(x-4)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x}=\sqrt{-(x-4)}\xrightarrow{\text{به توان 2}}|x|=|-(x-4)|=|x-4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x-4 \Rightarrow 0=-4 \quad \times \\ x=-x+4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \quad \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $x=2$ محور تقارن دو نمودار است.

.75

$$y=x^2-2x \xrightarrow[\text{محور }x\text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-(x^2-2x)=-x^2+2x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور }y\text{ ها}]{\text{16 واحد انتقال در جهت}} y_1=-x^2+2x+16$$

حال معادلهٔ جدید را با معادلهٔ قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطهٔ برخورد را به دست آوریم:

$$y=y_1 \Rightarrow x^2-2x=-x^2+2x+16 \Rightarrow 2x^2-4x-16=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \quad \text{ق.ق} \\ x=-2 \quad (\text{غ.ق.ق زیرا } x>1) \end{cases}$$

$$x=4 \Rightarrow y=8 \Rightarrow A(4,8)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA=\sqrt{16+64}=\sqrt{16(1+4)}=4\sqrt{5}$$

.76

$$\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{راست}]{\text{1 واحد به سمت}}\frac{1}{x-1}\xrightarrow[\text{محور }x\text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}\frac{-1}{x-1}\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{2 واحد رو به}}\frac{-1}{x-1}-2$$

$$\text{حالا}: \frac{1}{x}=\frac{-1}{x-1}-2 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-2 \Rightarrow \frac{x-1+x}{x^2-x}=-2$$

$$-2x^2+2x=2x-1 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} \begin{cases} (\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}) \\ (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2+(\sqrt{2}-0)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

.77

$$g(x) = \sqrt{۴ - (x - k + ۲)} + k = \sqrt{-x + k + ۲} + k$$

تابع $g(x)$ وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند و همچنین با فرض اینکه نقطهٔ برخورد تابع و وارونش بر روی خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین $g(۱) = ۱$. حال داریم:

$$A(۱\,,\,۱) \in g(x) \Rightarrow \sqrt{۱ + k} + k = ۱ \Rightarrow k = ۰$$

$$h(x) = y - ۱ \Rightarrow \sqrt{-x + ۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

.78

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + ۳} + k \xrightarrow{g(۱)=۱} \sqrt{۱ + ۳} + k = ۱ \Rightarrow k = -۱$$

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + ۳} - ۱ \Rightarrow -g(x) = ۱ - \sqrt{\sqrt{x} + ۳} \Rightarrow -g(x + ۴) = ۱ - \sqrt{\sqrt{x + ۴} + ۳}$$

$$\xrightarrow{x=۰} y = ۱ - \sqrt{۲ + ۳} = ۱ - \sqrt{۵}$$

.79

$$f(x) = ۴x - x^۲$$

$$\xrightarrow[\text{منفی انتقال می‌دهیم}]{\text{۲ واحد در جهت}} f(x + ۲) = ۴(x + ۲) - (x + ۲)^۲ = -x^۲ + ۴$$

$$f(x) = f(x + ۲) \Rightarrow ۴x - x^۲ = -x^۲ + ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(x) = ۴x - x^۲ \xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۳ \Rightarrow A(۱, ۳)\ \text{نقطهٔ برخورد}$$

$$OA = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

.80

ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \frac{x - ۳}{۲}$ به‌صورت $f^{-۱}(x) = ۲x + ۳$ است.

حال اگر نمودار این تابع را ۶ واحد به پایین انتقال دهیم، ضابطهٔ تابع برابر است با:

$$f^{-۱}(x) - ۶ = ۲x + ۳ - ۶ = ۲x - ۳$$

نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع با نمودار f را پیدا می‌کنیم:

$$۲x - ۳ = \frac{x - ۳}{۲} \Rightarrow ۴x - ۶ = x - ۳ \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$$

$$\Rightarrow f(۱) = \frac{۱ - ۳}{۲} = -۱ \Rightarrow A(۱, -۱) \Rightarrow OA = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

.81

$$f(x) = (x - ۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x - ۱)^۲ = -(x + ۱)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x + ۱)^۲ + ۴$$

حال باید طول نقطهٔ تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x - ۱)^۲ = -(x + ۱)^۲ + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = -(x^۲ + ۲x + ۱) + ۴$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$

.82

اگر نمودار $y=x^2-x-3$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی انتقال دهیم، $f(x)=(x+2)^2-(x+2)-3$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به‌طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم، $g(x)=f(x)-9$ به دست می‌آید.

$$g(x)=x^2+4x+4-x-2-3-9=x^2+3x-10$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2+3x-10<0 \Rightarrow (x-2)(x+5)<0 \Rightarrow -5<x<2$$

.83

راه‌حل اول:

اگر تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x)=-(x-3)^2+2(x-3)+5$ تبدیل می‌شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت yهای منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-2$ خواهد بود.

$$g(x)=f(x)-2=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2=-(x^2-6x+9)+2x-6+5-2$$
$$\Rightarrow g(x)=-x^2+6x-9+2x-3=-x^2+8x-12$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y=x$ قرار گیرد.

$$g(x)>x \Rightarrow -x^2+8x-12>x$$
$$\Rightarrow x^2-7x+12<0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-4)}_{h(x)}<0 \quad (*)$$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
h(x)		+	0	−	0	+	

$$h(x)<0 \Rightarrow x\in(3,4)$$

راه‌حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم $x=4$ ، داریم: $0<0$ که غیرقابل‌قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

.84

$$2^{x+3+|x+3|}-2=0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|}=2$$
$$\Rightarrow x+3+|x+3|=1 \Rightarrow |x+3|=-x-2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=-x-2 \Rightarrow x=\dfrac{-5}{2} \\ x+3=x+2 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}$$

.85

تابع f همانی است، پس $f(x)=x$ ؛ ضابطهٔ تابع g نیز به‌صورت $g(x)=\frac{۱}{x-a}$ می‌شود. طبق فرض، ریشهٔ معادله زیر برابر $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است:

$$|g(x)|-۲=\frac{۱}{|f(x)|}\Rightarrow \left|\frac{۱}{x-a}\right|-۲=\frac{۱}{|x|}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\left|\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a}\right|-۲=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow \frac{۱}{\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|}=۲+\sqrt{۲}\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|=\frac{۱}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=\sqrt{۲}-۱\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱\Rightarrow a=۱\end{cases}$$

چون تابع f همانی است، پس از $f(x+a)=۳$ نتیجه می‌شود $x+a=۳$ و اختلاف مقادیر x در آن به‌صورت زیر می‌شود:

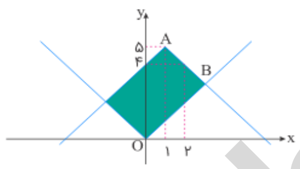
$$x_۱+a_۱=۳=x_۲+a_۲\Rightarrow x_۱-x_۲=a_۲-a_۱$$
$$\Rightarrow x_۱-x_۲=۱-(\sqrt{۲}-۱)=۲-\sqrt{۲}$$

.86

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y=۵-\lvert x-۱\rvert$	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y=\lvert x\rvert$	۱	۰	۱



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵-|x-۱|=|x|\Rightarrow |x|+|x-۱|=۵\Rightarrow\begin{cases}x+x-۱=۵\Rightarrow x=۳\\ -x-x+۱=۵\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳,۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۳-۵)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$
$$|BO|=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$
$$S=|AB|\times|BO|=۳\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}=۱۲$$

.87

گام اول

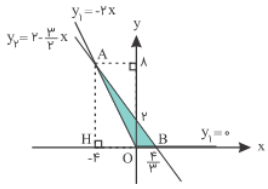
هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq ۰$ و $x < ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = ۰ & ; x \geq ۰ \\ -x - x = -۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطهٔ A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

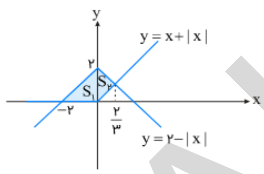
$$۲ - \frac{۳}{۲}x = -۲x \Rightarrow -۲x + \frac{۳}{۲}x = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = ۲ \Rightarrow x = -۴$$
$$\xrightarrow{y=-۲x} y = ۸ \Rightarrow A(-۴, ۸)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\overset{\Delta}{ABO}$ برابر ۸ است و مساحتش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\overset{\Delta}{ABO}} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \frac{۴}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

.88

$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases} \quad , \quad y = ۲ - |x| = \begin{cases} ۲ - x & ; x \geq ۰ \\ x + ۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$



$$۲ - x = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$
$$S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

.89

نمودارهای دو تابع به‌صورت زیر هستند.

$$y=|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases}x+۲+x-۱=۲x+۱ & , x\geq ۱\\ x+۲-(x-۱)=۳ & -۲\leq x<۱\\ -x-۲-x+۱=-۲x-۱ & x<-۲\end{cases}$$

$$۳y+x=۱۷\ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۰\\ y=\dfrac{۱۷}{۳}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}y=۲x+۱\\ ۳y+x=۱۷\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}۳(۲x+۱)+x=۱۷\\ ۷x=۱۴\to x=۲\\ y=۲\times ۲+۱=۵\\ \Rightarrow B\left|\begin{array}{l}x=۲\\ y=۵\end{array}\right.\end{array}$$

$$\begin{cases}y=-۲x-۱\\ ۳y+x=۱۷\end{cases}\Rightarrow ۳(-۲x-۱)+x=۱۷\Rightarrow -۵x=۲۰\Rightarrow x=-۴$$

$$y=-۲(-۴)-۱=۷\Rightarrow A\left|\begin{array}{l}x=-۴\\ y=۷\end{array}\right.$$

$$AB=\sqrt{(۲+۴)^۲+(۵-۷)^۲}=\sqrt{۳۶+۴}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

.90

تابع f اکیداً صعودی است و دامنهٔ آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، بنابراین داریم:

$$۲m^۲-۹m-۲>۰\Rightarrow \begin{cases}m>\dfrac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴}\\ m<\dfrac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴}\end{cases}\quad (۱)$$

$$m^۲-۴m+۴>۰\Rightarrow (m-۲)^۲>۰\Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{۲\}\quad (۲)$$

$$f(۲m^۲-۹m-۲)<f(m^۲-۴m+۴)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} ۲m^۲-۹m-۲<m^۲-۴m+۴$$

$$\Rightarrow m^۲-۵m-۶<۰\Rightarrow (m+۱)(m-۶)<۰\Rightarrow m\in(-۱,۶)\quad (۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳)\Rightarrow m\in(-۱,\frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴})\cup(\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴},۶)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=۵$$

در بازهٔ به‌دست‌آمده، فقط یک عدد صحیح ۵ وجود دارد.

.91

$$۵y-۱۰x=۱۲\xrightarrow{y=۷/۲}۵(۷/۲)-۱۰x=۱۲$$

$$\Rightarrow x=۲/۴\Rightarrow A'(۲/۴,۷/۲)\in f^{-۱}(x)\Rightarrow (۷/۲,۲/۴)\in f(x)$$

$$\Rightarrow f(۷/۲)=۲/۴\Rightarrow \sqrt{۷/۲}\sqrt{m(۷/۲)-۱}=۲/۴$$

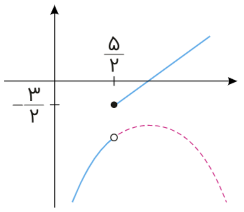
$$\xrightarrow{\text{به توان دو}}(۷/۲)(۷/۲m-۱)=(۲/۴)(۲/۴)$$

$$\Rightarrow ۷/۲m-۱=۰/۸\Rightarrow m=\frac{۱}{۴}$$

$$f(\frac{۴}{m})=f(۱۶)=\sqrt{۱۶}\sqrt{(۱۶)(\frac{۱}{۴})-۱}=۴\sqrt{۳}$$

.92

توابع یک‌به‌یک، وارون‌پذیرند. طول رأس تابع درجهٔ دوم باید از $x=\frac{5}{2}$ کمتر نباشد تا یک‌به‌یک شود.



$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b'}{2a'} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-a}{-4} = \frac{a}{4} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow a \geq 10$$

مقدار تابع درجهٔ دوم را در $x=\frac{5}{2}$ محاسبه می‌کنیم که عرض رأس سهمی و بیشترین مقدار سهمی است:

$$-2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}a - 21 < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}a < 32 + \frac{5}{4} \Rightarrow a < 13/3$$

پس بزرگ‌ترین مقدار صحیح a، ۱۳ است.

$$f^{-1}(-3) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -3$$

باتوجه‌به شکل، $f(\alpha)=-3$ در ضابطهٔ پایینی اتفاق می‌افتد، بنابراین:

$$-2\alpha^2 + 13\alpha - 21 = -3 \Rightarrow 2\alpha^2 - 13\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \alpha = 4/5 \ , \ \alpha = 2$$

α باید از $\frac{5}{2} = 2/5$ کمتر باشد، پس $\alpha = 2$ مورد قبول است.

.93

برای اینکه x عددی صحیح باشد باید ۳۰ بر $|y|+1$ بخش‌پذیر باشد و y هم عددی صحیح باشد:

$$1+|y| = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$
$$\Rightarrow |y| = 0, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 29$$
$$\Rightarrow y = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 9, \pm 14, \pm 29$$

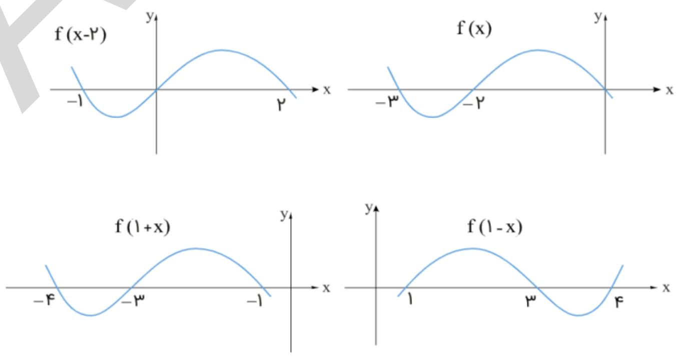
$$f = \{(30,0), (15,\pm 1), (10,\pm 2), (6,\pm 4), (5,\pm 5), (3,\pm 9), (2,\pm 14), (1,\pm 29)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید حداقل ۷ عضو از f را حذف کنیم.

.94

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}} \Rightarrow \frac{f(1-x)}{f(x+1)} \geq 0$$

باتوجه‌به نمودار $f(x-2)$، توابع $f(1-x)$ و $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



حال داریم:

x	$-\infty$		-۴		-۳		-۱		۱		۳		۴		$+\infty$
f(۱−x)		−		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+	
f(x+۱)		+	۰	−	۰	+	۰	−		−		−		−	
$\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}$		−	ن ت	+	ن ت	−	ن ت	+	۰	−	۰	+	۰	−	

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$(-۴,-۳)\cup(-۱,۱]\cup[۳,۴]$$

اعداد صحیح قابل‌قبول عبارتند از:

$$x=۰\,,\ x=۱\,,\ x=۳\,,\ x=۴$$

.95

$$fog(-\frac{۱}{۳})=f(g(-\frac{۱}{۳}))$$

$$g(-\frac{۱}{۳})=f([-\frac{۱}{۳}-f(-\frac{۱}{۳})])=f([-\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}])=f([\frac{۳}{۳}])=f(۱)=۲$$

$$f(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۳}+(-۱)=-\frac{۴}{۳}$$

$$f(g(-\frac{۱}{۳}))=f(۲)=۴$$

.96

توابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $\log_{۰/۵}x$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس مجموع آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع $x^۳$ اکیداً صعودی است، پس ترکیب این تابع با $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{۰/۵}x$ اکیداً نزولی خواهد بود. یعنی تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است. حال داریم:

$$(fof)(x)<f(۲^{-۳x})\Rightarrow f(f(x))<f((۲^{-x})^۳)$$

$$\xrightarrow{\text{اکیدا نزولی } f} f(x)>(۲^{-x})^۳$$

$$\Rightarrow ((\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x)^۳>(۲^{-x})^۳=((\frac{۱}{۲})^x)^۳$$

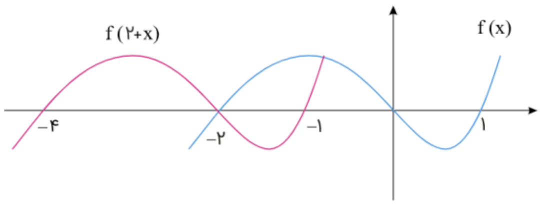
$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x>(\frac{۱}{۲})^x\Rightarrow \log_{۰/۵}x>۰$$

$\log_{۰/۵}x$ در بازهٔ $(۰,۱)$ مثبت است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(۲^{-۳x})$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(۰,۱)$ می‌باشد.

.97

$$g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}}\Rightarrow -\frac{f(x)}{f(۲+x)}\geq ۰\Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)}\leq ۰$$

$$f(x)=۰;\quad x=-۲,۰,۱$$



$$f(x+۲)=۰;\quad x=-۴,-۲,-۱$$

x		−۴		−۲		−۱		۰		۱	
f(x)	−		−	۰	+		+	۰	−	۰	+
f(x+۲)	−	۰	+	۰	−	۰	+		+		+
$\frac{f(x)}{f(x+۲)}$	+	ت.ن	−	ت.ن	−	ت.ن	+	۰	−	۰	+

$$D_g=(-۴,-۲)\cup(-۲,-۱)\cup[۰,۱]$$

دامنهٔ تابع شامل اعداد صحیح ۳-، ۰ و ۱ است.

.98

$$gof(-\frac{۵}{۳})=g(f(\frac{-۵}{۳}))=?$$

$$f(-\frac{۵}{۳})=۲[-\frac{۵}{۳}]-(-\frac{۵}{۳})=۲(-۲)+\frac{۵}{۳}=-۴+\frac{۵}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$

$$f(-\frac{۷}{۳})=۲[-\frac{۷}{۳}]-(-\frac{۷}{۳})=-۶+\frac{۷}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}$$

$$g(f(-\frac{۵}{۳}))=g(-\frac{۷}{۳})=f([-\frac{۷}{۳}+f(-\frac{۷}{۳})])=f([-\frac{۷}{۳}-\frac{۱۱}{۳}])$$

$$=f(-۶)=۲[-۶]+۶=-۱۲+۶=-۶$$

.99

x و $\log x$ دو تابع اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها یعنی $x+\log x$ اکیداً صعودی است.

تابع $x^۵$ نیز اکیداً صعودی است و همچنین می‌دانیم ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی می‌باشد، بنابراین $f(x)$ اکیداً صعودی است.

$$(fof)(x)=f(f(x))<f(x^۵)\Rightarrow f(x)<x^۵\Rightarrow (x+\log x)^۵<x^۵$$

$$\Rightarrow x+\log x<x\Rightarrow \log x<۰$$

$\log x$ در بازهٔ $(۰,۱)$ منفی است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(x^۵)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(۰,۱)$ می‌باشد.

.100

f برد ضابطه اول : $R_1=[\frac{13}{2},+\infty)$

f ضابطه دوم : $y_2=-x^2+2mx+2 \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-2m}{-2}=m$

$\Rightarrow x_S=m$ رأس سهمی

برای اینکه $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، نباید رأس سهمی در دامنه تعریف ضابطه دوم باشد، یعنی:

$$x_S=m\le -\frac{3}{2}\,,\, m^2+2<\frac{13}{2}\Rightarrow m=-2 (m\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow y_2=-x^2-4x+2$$

$$f^{-1}(-19)=?\Rightarrow -x^2-4x+2=-19\Rightarrow x^2+4x-21=0\Rightarrow x=3\,,\,x=-7$$

چون $x>-\frac{3}{2}$ مورد قبول است پس $x=3$ پاسخ سؤال است.

.101

چون تابع اکیداً نزولی است، پس:

$$m^2-m-5>-3+2m-m^2\Rightarrow 2m^2-3m-2>0$$

ریشه‌های عبارت فوق عبارت‌اند از:

$$m=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

m	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	

$$p(x)>0\Rightarrow m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$$

چون دامنه منفی است، پس:

$$m^2-m-5<0\Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\xrightarrow{\sqrt{21}\simeq 4/5}-1/75<m<2/75$$
$$-m^2+2m-3<0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow m\in\mathbb{R}$$

لازم است در کل $-1/75<m<-0/5$ یا $2<m<2/75$ باشد، یعنی فقط $m=-1$ قابل‌قبول است.

.102

نقطه به عرض ۱۰ روی خط $y=12-x$ دارای طول زیر است:

$$10=12-x\Rightarrow x=2\Rightarrow A(2,10)$$

اگر A روی تابع وارون باشد، پس $A'(10,2)$ روی f است، یعنی:

$$2=\sqrt{10-2\sqrt{10m-1}}\Rightarrow 4=10-2\sqrt{10m-1}\Rightarrow\sqrt{10m-1}=3$$
$$\Rightarrow 10m-1=9\Rightarrow m=1$$

بنابراین:

$$f(m+4)=f(5)=\sqrt{5-2\sqrt{5-1}}=\sqrt{5-4}=1$$

.30

چون x عدد صحیح است پس ۷۲ باید بر $1 - y^2$ بخش‌پذیر باشد از طرفی y هم باید عدد صحیح باشد:

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \Rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

$$\Rightarrow f = \{(-72, 0), (24, 2), (24, -2), (9, 3), (9, -3), (3, 5), (3, -5)\}$$

با حذف حداقل ۳ عضو تابع خواهیم داشت.