فصل ۴ : بانک کنکور " قدرمطلق و جزء صحیح "

.1

معادلهٔ $|۲x-۱|+|x+۲|=۳$ را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

x		-۲		$\frac{۱}{۲}$	
۲x−۱	−		−	۰	+
x+۲	−	۰	+		+

$$(۱)\ : x \le -۲ \Rightarrow -۲x+۱-x-۲=۳ \Rightarrow ۳x=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \notin (-\infty,-۲]$$

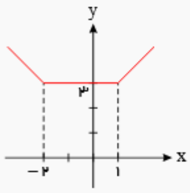
$$(۲)\ : -۲ < x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x+۱+x+۲=۳ \Rightarrow x=۰ \in (-۲,\frac{۱}{۲}]$$

$$(۳)\ : x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱+x+۲=۳ \Rightarrow ۳x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳} \in (\frac{۱}{۲},+\infty)$$

پس معادله دو جواب $\left\{۰,\frac{۲}{۳}\right\}$ دارد و مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

.2

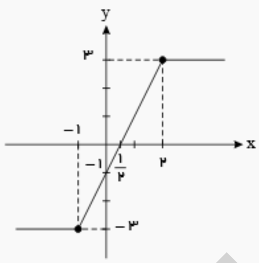
تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x=-۲$ و $x=۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\rightarrow x<-۲$: اکیداً نزولی

.3

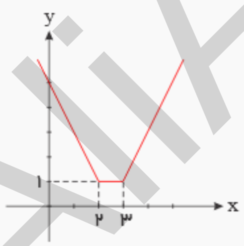
تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x=-۱$ و $x=۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\longrightarrow -۱<x<۲$: اکیداً صعودی

.4

تابع f یک تابع گلدانی است که در $x<۲$ اکیداً نزولی است و ضابطهٔ آن در این بازه $f(x)=-۲x+۵$ است.

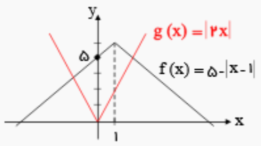


$$\begin{cases} f(x)=-۲x+۵ \\ g(x)=۲x^۲-x-۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵ \Rightarrow ۲x^۲+x-۱۵=(۲x-۵)(x+۳)=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۱+۱۲۰=۱۲۱} \begin{cases} x=\dfrac{-۱+۱۱}{۴}=\dfrac{۵}{۲} (\text{با توجه به } x<۲)\ \text{غ ق} \\ x=\dfrac{-۱-۱۱}{۴}=-۳ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

تنها نقطه مشترک f و g در بازهٔ $(-\infty,۲)$ نقطه $(-۳,۱۱)$ است.

.5



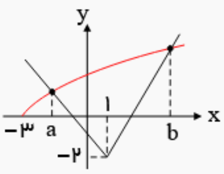
با توجه به نمودارهای دو تابع f و g، یک نقطه تقاطع مثبت (که عددی بزرگ‌تر از ۱ است.) و یک نقطهٔ تقاطع منفی وجود دارد که آنها را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x>۱}۵-(x-۱)=۲x\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\\ \xrightarrow{x<۰}۵+(x-۱)=-۲x\Rightarrow ۳x=-۴\Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

با توجه به نمودار، در بازهٔ $(-\frac{۴}{۳},۲)$ نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار دارد.

.6

نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x+۳}$ و $f(x)=|x-۱|-۲$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل a محل تلاقی شاخهٔ منفی $f(x)$ با تابع y و b محل تلاقی شاخهٔ مثبت $f(x)$ با تابع y است.



$$\sqrt{x+۳}=-x-۱\xrightarrow{\text{توان دو}}x+۳=x^۲+۲x+۱$$
$$\to x^۲+x-۲=۰\to(x+۲)(x-۱)=۰\to a=-۲$$
$$\sqrt{x+۳}=x-۳\to x+۳=x^۲-۶x+۹\to x^۲-۷x+۶=۰$$
$$\to(x-۱)(x-۶)=۰\to b=۶\to b-a=۶+۲=۸$$

.7

نمودار $y=|۲x^۲-۴|$ در زیر خط $y=۲x$ قرار دارد، بنابراین:

$$|۲x^۲-۴|<۲x$$
$$\Rightarrow -۲x<۲x^۲-۴<۲x\xrightarrow{\div ۲}-x<x^۲-۲<x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $-x<x^۲-۲$ و $x^۲-۲<x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^۲-۲>-x\Rightarrow \underbrace{x^۲+x-۲}_{p(x)}>۰$$

x	-∞		-۲		۱		+∞
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow x<-۲ \text{ یا } x>۱\quad(۱)$$
$$x^۲-۲<x\Rightarrow \underbrace{x^۲-x-۲}_{q(x)}<۰$$

x	-∞		-۱		۲		+∞
q(x)		+	۰	− ج	۰	+	

$$\Rightarrow -۱<x<۲\quad(۲)$$
$$(۱)\cap(۲)\Rightarrow ۱<x<۲\Rightarrow(a,b)=(۱,۲)$$

بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با:

$$۲-۱=۱$$

.8

اگر نمودار تابع $y=|\frac{1}{2}x|-2$ را ۴ واحد به‌سمت چپ منتقل کنیم معادله به‌صورت $y=|\frac{1}{2}(x+4)|-2$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به‌صورت $y=|\frac{1}{2}(x+4)|-2+1$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}}=|\frac{1}{2}x|-2 \\ y_{\text{جدید}}=|\frac{1}{2}x+2|-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{1}{2}x|-2=|\frac{1}{2}x+2|-1$$

$$\xrightarrow{\times 2} |x|-4=|x+4|-2 \Rightarrow |x|-|x+4|=2 \xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x=-3$$

.9

برای این منظور باید نامعادلهٔ $|x|+2x>-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ را حل کنیم.

$$x\geq 0 \rightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}>2x+x \rightarrow x^2+\frac{7}{2}x-\frac{9}{2}<0$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		1		$+\infty$
عبارت <0		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\rightarrow \frac{-9}{2}<x<1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0\leq x<1 \qquad (I)$$

$$x<0 \rightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}>2x-x \rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}<0$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
عبارت <0		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\rightarrow -3<x<\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -3<x<0 \qquad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $-3<x<1$ می‌رسیم که طول نقطهٔ وسط بازهٔ $-1=\frac{-3+1}{2}$ است.

.10

گام اول

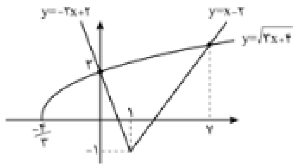
هر عبارت شامل قدر مطلق را می‌توان به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشهٔ قدر مطلق و مقادیر کوچک‌تر از آن به‌طور جداگانه بررسی کرد.

گام دوم

روش اول:

منحنی مربوط به دو تابع $y=\sqrt{3x+4}$ و $y=2|x-1|-x$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب ناحیه‌ای است که نمودار تابع $y=\sqrt{3x+4}$ بالای نمودار تابع $y=2|x-1|-x$ قرار می‌گیرد. باتوجه‌به گام اول، ابتدا وضعیت قدر مطلق را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$y=2|x-1|-x=\begin{cases}2(x-1)-x & ;\ x\geq 1\\ 2(-x+1)-x & ;\ x<1\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}x-2 & ;\ x\geq 1\\ -3x+2 & ;\ x<1\end{cases}$$



همان‌طور که از روی نمودار مشخص است مجموعه جواب نامعادلهٔ داده‌شده بازهٔ $(0,7)$ است و طول وسط آن $\frac{7}{2}$ می‌شود.

روش دوم:

عبارت رادیکالی $\sqrt{3x+4}$ روی بازهٔ $[-\frac{4}{3},+\infty)$ تعریف شده و $x=1$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله را در دو حالت $x\geq 1$ و $\frac{-4}{3}\leq x<1$ به دست می‌آوریم:

$$x\geq 1:\ |x-1|=x-1\Rightarrow\sqrt{3x+4}>2(x-1)-x\Rightarrow\sqrt{3x+4}>x-2$$

در بازهٔ $[1,2)$ این رابطه همواره برقرار است؛ زیرا روی این بازه $x-2<0$ و $\sqrt{3x+4}>0$ است. به ازای $x\geq 2$ دو طرف نامساوی مثبت است بنابراین می‌توان دو طرف را به توان دو رساند، پس داریم:

$$3x+4>(x-2)^2\Rightarrow 3x+4>x^2-4x+4\Rightarrow x^2-7x<0$$
$$\Rightarrow x(x-7)<0\Rightarrow 0<x<7\xrightarrow{x\geq 1}1\leq x<7\ (I)$$

$$x<1:\ |x-1|=-(x-1)=-x+1\Rightarrow\sqrt{3x+4}>2(-x+1)-x$$
$$\Rightarrow\sqrt{3x+4}>-2x+2-x\Rightarrow\sqrt{3x+4}>-3x+2$$

در محدودهٔ $-\frac{4}{3}\leq x\leq 0$ نامعادلهٔ $\sqrt{3x+4}>-3x+2$ برقرار نیست پس جواب نامعادله را در محدودهٔ $0<x<1$ بررسی می‌کنیم. باتوجه‌به اینکه به ازای $0<x<1$، $\left|\sqrt{3x+4}\right|>|-3x+2|$ است پس می‌توان دو طرف نامساوی را به توان دو رساند:

$$3x+4>(2-3x)^2\Rightarrow 3x+4>9x^2-12x+4\Rightarrow 9x^2-15x<0$$
$$\Rightarrow 3x(3x-5)<0\Rightarrow 0<x<\frac{5}{3}\xrightarrow{0<x<1}0<x<1\ (II)$$

اجتماع دو بازهٔ (I) و (II)، بازهٔ $0<x<7$ می‌شود که طول وسط این بازه برابر $\frac{7}{2}$ است.

.11

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{2-x}{2x-3}\right|>1$ ، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱ $(1,\frac{3}{2})$

۲ $(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$

۳ $(1,\frac{5}{3})$

۴ $(\frac{5}{3},2)$

می‌دانیم که $\frac{|f|}{|g|}=\left|\frac{f}{g}\right|$ است.

$$\frac{|۲-x|}{|۲x-۳|}>۱\rightarrow|۲-x|>|۲x-۳|\xrightarrow{\text{توان۲}}۴+x^۲-۴x>۴x^۲+۹-۱۲x$$

$$\rightarrow ۳x^۲-۸x+۵<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۱<x<\frac{۵}{۳}$$

ولی دقت کنید که $x=\frac{۳}{۲}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(۱,\frac{۳}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ در می‌آید.

.12

طبق فرض داریم:

$$۱۵x^۲+۷۳x+۱۴<۰\Rightarrow\underbrace{(۵x+۱)}_{x=-\frac{۱}{۵}}\underbrace{(۳x+۱۴)}_{x=-\frac{۱۴}{۳}}<۰\Rightarrow\frac{-۱۴}{۳}<x<\frac{-۱}{۵}\quad(I)$$

$$|\frac{x-۱}{۲}-۱|>۳\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{x-۱}{۲}-۱>۳\Rightarrow\frac{x-۱}{۲}>۴\Rightarrow x>۹\\ \frac{x-۱}{۲}-۱<-۳\Rightarrow\frac{x-۱}{۲}<-۲\Rightarrow x<-۳\end{array}\right\}\quad(II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک }(II),(I)}-\frac{۱۴}{۳}<x<-۳\Rightarrow max(b-a)=-۳-(-\frac{۱۴}{۳})=\frac{۵}{۳}$$

.13

راه‌حل اول: نامعادله فقط برای $x>۰$ جواب دارد. بنابراین:

$$|x^۲-۲x|<x\Rightarrow|x(x-۲)|<x\xrightarrow{x>۰}|x-۲|<۱$$

$$\Rightarrow-۱<x-۲<۱\Rightarrow۱<x<۳$$

راه‌حل دوم: داریم:

$$|a|<k\Rightarrow-k<a<k$$

نامعادله را در دو مرحله ($-k<a$ و $a<k$) حل کرده و بین مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم.

$$|x^۲-۲x|<x\Rightarrow-x<x^۲-۲x<x$$

$$۱)\ x^۲-۲x>-x\Rightarrow x^۲-x>۰\Rightarrow x(x-۱)>۰\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<۰\quad(I)$$

$$۲)\ x^۲-۲x<x\Rightarrow x^۲-۳x<۰\Rightarrow x(x-۳)<۰\Rightarrow۰<x<۳\quad(II)$$

نامعادله‌های ۱ و ۲ باید هم‌زمان برقرار باشند، پس بین دو مجموعه‌جواب به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(I)\cap(II):۱<x<۳\Rightarrow x\in(۱,۳)$$

.14

ابتدا جواب نامعادلهٔ $|۲x+۱|\leq۳$ را به‌دست می‌آوریم، سپس این جواب را با جواب نامعادلهٔ $x^۲+ax-b\leq۰$ مقایسه می‌کنیم:

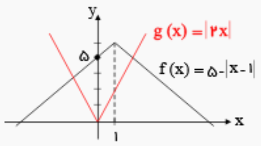
$$|۲x+۱|\leq۳\Rightarrow-۳\leq۲x+۱\leq۳\Rightarrow-۲\leq x\leq۱$$

پس نتیجه می‌گیریم که $x=-۲,۱$، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax-b=۰$ می‌باشند و می‌توان نوشت:

$$x^۲+ax-b=(x+۲)(x-۱)=x^۲+x-۲\Rightarrow a=۱,b=۲\Rightarrow a.b=۲$$

.15

با توجه به نمودارهای دو تابع f و g، یک نقطه تقاطع مثبت (که عددی بزرگ‌تر از ۱ است.) و یک نقطهٔ تقاطع منفی وجود دارد که آنها را به دست می‌آوریم:



$$f(x)=g(x)\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x>۱}۵-(x-۱)=۲x\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲\\ \xrightarrow{x<۰}۵+(x-۱)=-۲x\Rightarrow ۳x=-۴\Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

با توجه به نمودار، در بازهٔ $(-\frac{۴}{۳},۲)$ نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار دارد.

.16

روش اول:

ابتدا با استفاده از تعریف نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u|<a$، دامنهٔ تعریف تابع را به طور دقیق مشخص می‌کنیم:

$$|u|<a\Rightarrow -a<u<a$$

سپس مشخص می‌کنیم در محدودهٔ به‌دست‌آمده، تابع $f(x)$ چه وضعیتی دارد.

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\xrightarrow{+۱}-۱<x<۳\Rightarrow D_f=(-۱,۳)$$

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=x^۲-۲x+۱-۴=(x-۱)^۲-۴$$

در محدودهٔ $(-۱,۳)$، وضعیت $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

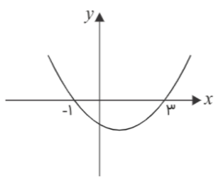
$$-۱<x<۳\Rightarrow -۲<x-۱<۲\Rightarrow (x-۱)^۲<۴\Rightarrow (x-۱)^۲-۴<۰\Rightarrow f(x)<۰$$

پس در دامنهٔ مشخص‌شده تابع $f(x)$ همواره منفی است.

روش دوم:

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)$$

با رسم نمودار تابع $f(x)$ وضعیت آن را در بازهٔ داده‌شده بررسی می‌کنیم.



در بازهٔ $(-۱,۳)$ نمودار $f(x)$ همواره زیر محور xها قرار دارد پس مقدار آن همواره منفی است.

روش سوم:

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)$$

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\xrightarrow{+۱}-۱<x<۳\Rightarrow D_f=(-۱,۳)$$

تابع $f(x)$ را تعیین علامت کرده و وضعیت آن را روی دامنهٔ تعریف‌شده یعنی بازهٔ $(-۱,۳)$ مشخص می‌کنیم:

تابع $f(x)$ روی دامنهٔ تعریف‌شده در صورت تست همواره منفی است.

x		-۱		۳	
$f(x)$	+	۰	−	۰	+

.17

یک‌بار فرض می‌کنیم $x \geq 0$ باشد و بار دیگر $x < 0$. در هر دو حالت مجموعه‌جواب نامعادله را تعیین کرده و سپس بین آن‌ها اجتماع می‌گیریم.

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$(x-4)\,x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5 \quad (I)$$

باتوجه‌به محدودهٔ اولیه $(x \geq 0)$ این جواب قابل‌قبول است.

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$(x-4)(-x) < 2x - 5 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

x		$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$	
x^2-2x-5	+		−		+

$$x < 1-\sqrt{6} \text{ یا } x > 1+\sqrt{6} \xrightarrow{x<0} x < 1-\sqrt{6} \quad (II)$$

اجتماع دو مجموعه‌جواب (I) و (II) برابر است با:

$$(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

.18

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

گام دوم

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^2+1| = x^2 + 1$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$2x + 1 - |x-2| > x^2 + 1$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq 2$ و $x < 2$ حل می‌کنیم:

$$(I)\quad x \geq 2 \;\Rightarrow\; x - 2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |x-2| = x - 2$$
$$2x + 1 - (x-2) > x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow\; (x-2)(x+1) < 0$$
$$\Rightarrow\; -1 < x < 2 \xrightarrow{x \geq 2} \text{هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد } x$$

$$(II)\quad x < 2 \;\Rightarrow\; x - 2 < 0 \;\Rightarrow\; |x-2| = -(x-2)$$
$$2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x + 2 < 0$$
$$\Rightarrow\; (x-2)(x-1) < 0 \;\Rightarrow\; 1 < x < 2 \xrightarrow{x<2} 1 < x < 2$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $(1, 2)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2+1| > 2x + 1 - |x-2|$ می‌شود.

.19

$$f(x)=x^{۲}-۲[x]\Rightarrow f(\sqrt{۳})=۳-۲[\sqrt{۳}]=۳-۲[۱/۷]=۳-۲(۱)=۱$$

$$f(\frac{-۱}{۲}f(\sqrt{۳}))\overset{f(\sqrt{۳})=۱}{=\!=\!=}f(\frac{-۱}{۲})=(\frac{-۱}{۲})^{۲}-۲[\frac{-۱}{۲}]=\frac{۱}{۴}-۲(-۱)=۲/۲۵$$

.20

روش اول:

$$\underbrace{۴n^{۲}-۴n+۱}_{(۲n-۱)^{۲}}<۴n^{۲}-۳n+۱<\underbrace{۴n^{۲}}_{(۲n)^{۲}}\to ۲n-۱<\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}<۲n\Rightarrow\left[\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}\right]=۲n-۱$$

$$\underbrace{n^{۲}-۴n+۴}_{(n-۲)^{۲}}<n^{۲}-۲n<\underbrace{n^{۲}-۲n+۱}_{(n-۱)^{۲}}\to n-۲<\sqrt{n^{۲}-۲n}<n-۱\Rightarrow\left[\sqrt{n^{۲}-۲n}\right]=n-۲$$

$$\left[\sqrt{۴n^{۲}-۳n+۱}\right]-۲\left[\sqrt{n^{۲}-۲n}\right]=(۲n-۱)-۲(n-۲)=۳$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً $n=۳$ را قرار دهیم.

$$n=۳\to\left[\sqrt{۳۶-۹+۱}\right]-۲\left[\sqrt{۹-۶}\right]=[\underbrace{\sqrt{۲۸}}_{۵/\cdots}]-۲[\underbrace{\sqrt{۳}}_{۱/\cdots}]=۵-۲(۱)=۳$$

.21

گام اول

با توجه به ضابطهٔ تابع که به صورت $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱$ است، محدودهٔ اولیهٔ x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-۲\le x<۰,۰\le x<۲,۲\le x<۴,۴\le x<۶$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-۲\le x<۰\Rightarrow -۱\le\frac{x}{۲}<۰\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=-۱\Rightarrow y=۲(-۱)+۱=-۲+۱=-۱$$

$$۰\le x<۲\Rightarrow ۰\le\frac{x}{۲}<۱\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۰\Rightarrow y=۱$$

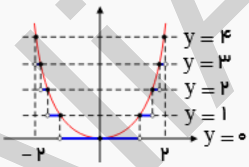
$$۲\le x<۴\Rightarrow ۱\le\frac{x}{۲}<۲\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۱\Rightarrow y=۲(۱)+۱=۲+۱=۳$$

$$۴\le x<۶\Rightarrow ۲\le\frac{x}{۲}<۳\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۲\Rightarrow y=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل‌شده است.

.22

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تابع $y=[x^{۲}]$ روی بازه‌ی $(-۲,۲)$، از ۷ پاره‌خط تشکیل شده است.



.23

می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & x\notin\mathbb{Z}\\ ۰ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow g(f(x)):\begin{cases}x\notin\mathbb{Z}: & g(-۱)=۱-۱-۲=-۲\\ x\in\mathbb{Z}: & g(۰)=-۲\end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

.24

به کمک تعریف تابع $f(x)$، تابع $g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

می‌دانیم $0 \le x-[x] < 1$

$$g(x) = f(2x-3) - 2f(x) = ((2x-3)-[2x-3]) - 2(x-[x])$$
$$= 2x-[2x]-2x+2[x] = -[2x]+2[x] = -[2x-2[x]] = -[2(x-[x])]$$
$$0 \le 2x-2[x] < 2 \Rightarrow [2x-2[x]] = 0, 1 \Rightarrow -[2x-2[x]] = 0, -1$$

بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

.25

اگر $x^2+x<0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-1<x<0$ است.

$$x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} < 0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow -1<x<0$$

حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 0<x^2<1 \Rightarrow [x^2]=0 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} -1<x^3<0 \Rightarrow [x^3]=-1 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}} 0<x^4<1 \Rightarrow [x^4]=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^2]+[x^3]+[x^4] = (-1)+0+(-1)+0 = -2$$

.26

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow -1 \le x^2+x<0 \begin{cases} x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<x<0 \\ -1 \le x^2+x \Rightarrow x^2+x+1 \ge 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>0\ ,\ \Delta<0} x \in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1<x<0$$

$$-1<x<0 \xrightarrow{\text{توان ۲۰}} 0<x^{20}<1 \Rightarrow [x^{20}]=0$$

.27

می‌دانیم: $\boxed{[x]=n\,,\, n\in\mathbb{Z} \to n \le x < n+1}$

$$[x-2]=1 \to [x]-2=1 \to [x]=3 \to 3 \le x < 4$$

در این بازه، قدر مطلق اول مثبت و قدر مطلق دوم منفی است.

$$f(x) = x-3-(-x+4) = 2x-7$$

اکنون باید توابع $f(x)$ و $g(x)$ را تلاقی دهیم.

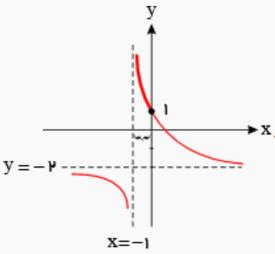
$$2x^2+x-17 = 2x-7 \to 2x^2-x-10=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \Delta = 1+80 = 81$$

$$\to \begin{cases} x = \dfrac{1+9}{4} = \dfrac{5}{2}\ \text{غ‌ق‌ق} \\ x = \dfrac{1-9}{4} = -2\ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

هیچ کدام از دو x بدست آمده در بازه‌ی $3 \le x < 4$ نمی‌باشند. بنابراین دو تابع فاقد نقطه‌ی مشترک در بازه‌ی داده شده هستند.

.28

در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $x - [x]$ است که می‌دانیم $\circ \leq x - [x] < \text{۱} -$ است کافی است تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم وقتی $\circ \leq x < \text{۱} -$ است چه عرضی به ما می‌دهد.



$\rightarrow Rgof_{(x)} = [\text{۱}, +\infty)$

.29

روش اول:

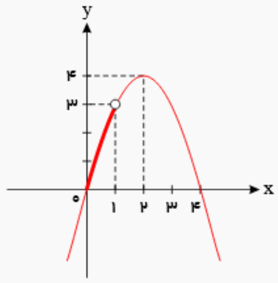
می‌دانیم که $\circ \leq u - [u] < \text{۱}$ است پس $\circ \leq \text{۲}x - [\text{۲}x] < \text{۱}$ است یعنی $\circ \leq f(x) < \text{۱}$ است.

$$gof(x) = g(f(x)) = -f^{\text{۲}}(x) + \text{۴}f(x) = -(f^{\text{۲}}(x) - \text{۴}f(x)) = -((f(x) - \text{۲})^{\text{۲}} - \text{۴}) = -(f(x) - \text{۲})^{\text{۲}} + \text{۴}$$

پس : $\circ \leq f(x) < \text{۱} \rightarrow -\text{۲} \leq f(x) - \text{۲} < -\text{۱} \rightarrow \text{۱} < (f(x) - \text{۲})^{\text{۲}} \leq \text{۴} \rightarrow -\text{۱} > -(f(x) - \text{۲})^{\text{۲}} \geq -\text{۴}$

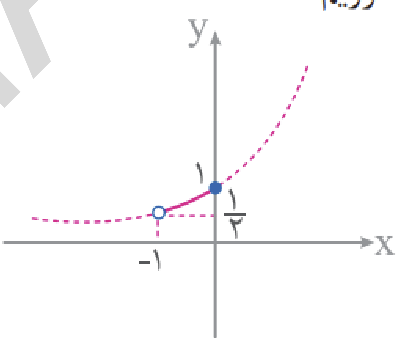
$\rightarrow \text{۳} > -(f(x) - \text{۲})^{\text{۲}} + \text{۴} \geq \circ \rightarrow \circ \leq gof(x) < \text{۳} \rightarrow R_{gof} = [\text{۳}, \circ)$

روش دوم: در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $\text{۲}x - [\text{۲}x]$ است که می‌دانیم $\circ \leq \text{۲}x - [\text{۲}x] < \text{۱}$ است کافی است تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص کنیم وقتی $\circ \leq x < \text{۱}$ است چه عرضی به ما می‌دهد.



.30

می‌دانیم $\circ \leq x - [x] < \text{۱}$، پس $-\text{۱} < -x + [x] \leq \circ$ است. بنابراین باید برد تابع $g(x) = \text{۲}^x$ را به‌ازای مقادیر $(-\text{۱}, \circ]$ به‌دست آوریم:



برد تابع $gof = (\frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \text{۱}]$

31.

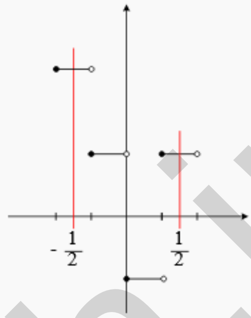
روش اول: چون داخل براکت $3x$ داریم طول پله‌ها $\frac{1}{3}$ است تابع را در بازی $-\frac{2}{3} \le x < \frac{2}{3}$ رسم می‌کنیم که بازهٔ سؤال را شامل می‌شود.

اگر $-\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$

اگر $-\frac{1}{3} \le x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$

اگر $0 \le x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$

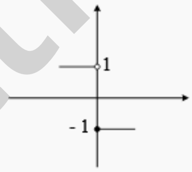
اگر $\frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$if: x \to 0^+ \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$

$if: x \to 0^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$



فقط در گزینهٔ ۲ تابع در نقطهٔ $x = 0$ ناپیوسته است.