فصل ۳ : بانک سوالات کنکور "معادله و تابع درجه دوم"

.1

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم؛ پس طول آن برابر $\frac{۳}{۲}x-۲$ است. داریم:

$$\text{مساحت مستطیل}=۱۹۲\Rightarrow x(\frac{۳}{۲}x-۲)=۱۹۲\Rightarrow \frac{۳}{۲}x^{۲}-۲x=۱۹۲$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۳x^{۲}-۴x-۳۸۴=۰\Rightarrow \Delta=۱۶+۴\times ۳\times ۳۸۴=۱۶+۱۶\times ۲۸۸=۱۶\times ۲۸۹$$

$$\xrightarrow{x>۰} x=\frac{۴+\sqrt{۱۶\times ۲۸۹}}{۶}=\frac{۴+۴\times ۱۷}{۶}=\frac{۲+۳۴}{۳}=۱۲\quad (*)$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل}=۲((\frac{۳}{۲}x-۲)+x)\xrightarrow{(*)}\text{محیط مستطیل}=۲((۱۸-۲)+۱۲)=۵۶$$

.2

سه نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۰,۵):\ c=۵\\(-۲,۵):\ ۴a-۲b+۵=۵\Rightarrow ۴a-۲b=۰\Rightarrow ۲a-b=۰\\(۱,۱۱):\ a+b+۵=۱۱\Rightarrow a+b=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-b=۰\\a+b=۶\end{cases}\Rightarrow a=۲,b=۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=۲x^{۲}+۴x+۵$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند جواب مسئله است:

$\text{گزینهٔ ۱}:(-۱,۳)\Rightarrow ۲(-۱)^{۲}+۴(-۱)+۵=۳\quad\checkmark$

$\text{گزینهٔ ۲}:(-۱,۴)\Rightarrow ۲(-۱)^{۲}+۴(-۱)+۵\neq ۴\quad\times$

$\text{گزینهٔ ۳}:(۲,۹)\Rightarrow ۲(۲)^{۲}+۴(۲)+۵\neq ۹\quad\times$

$\text{گزینهٔ ۴}:(۲,۱۵)\Rightarrow ۲(۲)^{۲}+۴(۲)+۵\neq ۱۵\quad\times$

.3

در تابع درجهٔ دوم $y=ax^{۲}+bx+c$ رأس سهمی از رابطهٔ $x_S=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید و این طول را در تابع قرار می‌دهیم عرض آن به دست می‌آید.

$$-\frac{b}{۲a}=-۱\rightarrow ۲a=b$$

$$f(-۱)=۹\rightarrow a-b+c=۹\xrightarrow{b=۲a}-a+c=۹$$

$$\left|\begin{matrix}۳\\۱\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}=۱=۹a+۳b+c\xrightarrow{b=۲a}۱۵a+c=۱\rightarrow\begin{cases}-a+c=۹\\۱۵a+c=۱\end{cases}\rightarrow ۱۶a=-۸\rightarrow a=-\frac{۱}{۲},b=-۱,c=\frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}-x+\frac{۱۷}{۲}$ است که نقطهٔ $\left|\begin{matrix}۵\\-۹\end{matrix}\right.$ روی این تابع قرار دارد.

.4

چون تابع مینیمم دارد، سهمی رو به بالا بوده و $m > 0$ است.

مینیمم سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$\text{رأس سهمی} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(m(5m-1)) - 144}{4m} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5m^2 - m - 36}{m} = 2 \Rightarrow 5m^2 - 3m - 36 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(5)(-36)}}{10} = \frac{3 \pm 27}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 & \text{ق‌ق} \\ m = \frac{-12}{5} < 0 & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

پس $m = 3$ قابل قبول و معادله به شکل زیر است:

$$y = 3x^2 - 12x + 14$$

محور تقارن سهمی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \times 3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

.5

محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \to \text{محور تقارن} : x = \frac{-a}{2(1)} \\ y = -x^2 - 2x + b \to \text{محور تقارن} : x = \frac{-(-2)}{2(-1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

طبق فرض، دو سهمی در دو نقطه به عرض ۱ مشترک‌اند، پس:

$$\text{سهمی اول} : y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } x=1 \text{ در سهمی دوم}} 1 = -1^2 - 2(1) + b \Rightarrow b = 4$$

توجه: می‌توانستیم به‌جای $x = 1$، ریشه $x = -3$ را در معادلهٔ سهمی دوم جایگذاری کنیم.

.6

چون این سهمی محور تقارن خود را در نقطهٔ $(2, -7)$ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $(2, -7)$ رأس سهمی است؛ بنابراین معادلهٔ آن را به صورت $y = k(x-2)^2 - 7$ در نظر می‌گیریم. حال چون این سهمی از نقطهٔ $(6, 1)$ می‌گذرد، پس:

$$y = k(x-2)^2 - 7 \xrightarrow{(6,1)} 1 = k(6-2)^2 - 7 \Rightarrow 16k = 8 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 7$ است که از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(-2, 1)$ در آن صدق می‌کند.

.7

باید $P>0$, $S<0$, $\Delta>0$ باشد:

۱ $\Delta=b^2-4ac>0 \Rightarrow 4(m+1)^2-4(m-2)(12)>0 \xrightarrow{\div 4}$

$(m+1)^2-12(m-2)>0 \Rightarrow m^2+2m+1-12m+24>0$

$\Rightarrow m^2-10m+25>0 \Rightarrow (m-5)^2>0 \Rightarrow m\neq 5$

۲ $S=-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow -\frac{-2(m+1)}{m-2}<0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2}<0 \Rightarrow -1<m<2$

۳ $P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{12}{m-2}>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2$

جواب‌های ۱ تا ۳ اشتراکی ندارند، پس $m=\varnothing$ است.

.8

برای اینکه تابع دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$(m-6)x^2-2mx-3=0$

۱) $\Delta>0 \Rightarrow (2m)^2-4(m-6)(-3)>0$

$4m^2+4(3m-18)>0$

$m^2+3m-18>0 \Rightarrow (m+6)(m-3)>0 \Rightarrow \begin{cases} m>3 \\ \text{یا} \\ m<-6 \end{cases}$

۲) $-\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6}<0 \Rightarrow 0<m<6$

۳) $\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6}>0 \Rightarrow m-6<0 \Rightarrow m<6$

اشتراک جواب‌ها : $3<m<6$

.9

شرط آنکه معادلهٔ درجه دومی، ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta>0$، $S=\frac{-b}{a}>0$ و $P=\frac{c}{a}>0$ باشند.

$x^2+(m-2)x+m+1=0$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(m-2)}{1}>0 \Rightarrow m-2<0 \Rightarrow m<2$

$P=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{1}>0 \Rightarrow m>-1$

از اشتراک دو شرط بالا $-1<m<2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta>0$ نیست ولی ما شرط $\Delta>0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$\Delta>0 \Rightarrow (m-2)^2-4(m+1)>0 \Rightarrow m^2-4m+4-4m-4>0$

$\Rightarrow m^2-8m>0 \Rightarrow \begin{cases} m>8 \\ \text{یا} \\ m<0 \end{cases}$

از اشتراک $-1<m<2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1<m<0$

.10

گام اول

شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دو دارای ۲ ریشهٔ مثبت باشد، این است که:

$$1)\ \Delta > 0 \qquad 2)\ S > 0 \qquad 3)\ P > 0$$

گام دوم

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(1)(14-a) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (a-2)^2 - (14-a) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (1)$$

$$S > 0 \Rightarrow 2(a-2) > 0 \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (2)$$

$$P > 0 \Rightarrow 14 - a > 0 \Rightarrow a < 14 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) : 5 < a < 14$$

.11

این منحنی باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد؛ درنتیجه کافی است حاصل‌ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$

m		-2		1	
P	$-$	تعریف نشده	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، $\Delta > 0$ می‌شود.

.12

گام اول

الف) نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادلهٔ $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > ۰$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله منفی است، بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.

ج) مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a، اشتراک بین سه مجموعه جواب به‌دست‌آمده است.

گام دوم

$$f(x) = ax^{۲} + (a+۳)x - ۱$$

$$۱)\ \ \Delta > ۰ \Rightarrow (a+۳)^{۲} - ۴(a)(-۱) > ۰ \Rightarrow (a+۳)^{۲} + ۴a > ۰$$

$$\Rightarrow a^{۲} + ۶a + ۹ + ۴a > ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۱۰a + ۹ > ۰$$

$$\Rightarrow (a+۹)(a+۱) > ۰ \Rightarrow a < -۹ \text{ یا } a > -۱ \quad (I)$$

$$۲)\ \ S = x_{۱} + x_{۲} = -\frac{a+۳}{a} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{a+۳}{a} > ۰ \Rightarrow a < -۳ \text{ یا } a > ۰ \ \ (II)$$

$$۳)\ \ P = x_{۱}.x_{۲} = -\frac{۱}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \ \ (III)$$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -۹$$

.13

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta > ۰$، $p > ۰$ و $s > ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۴ \times ۲ \times (m+۶) = m^{۲} - ۸m - ۴۸ > ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m-۱۲)(m+۴)}_{p} > ۰$$

x	-∞		-۴		۱۲		+∞
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow m < -۴ \text{ یا } m > ۱۲$$

$$۲)p > ۰ \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{۲} > ۰ \Rightarrow m < ۰$$

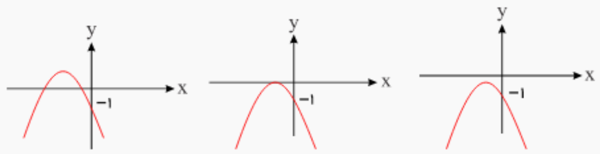
$$۳)s > ۰ \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m+۶}{۲} > ۰ \Rightarrow m > -۶$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

$$m \in (-۶, -۴)$$

.14

در سه حالت زیر نمودار سهمی داده شده در ناحیهٔ اول نمی‌گذرد:



$x^{۲}$ ضریب $< ۰ \Rightarrow a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (۱)$

اگر دو ریشه داشته باشد (شکل ۱) باید هر دو منفی باشد که داریم:

$$\Delta = a^{۲} + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶) > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \quad (۲)$$

$$P = \alpha\beta > ۰ \Rightarrow P = \frac{-۱}{a-۳} > ۰ \Rightarrow a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (۱)$$

$$S = \alpha + \beta < ۰ \Rightarrow S = \frac{-a}{\underbrace{a-۳}_{-}} < ۰ \Rightarrow a > ۳ \text{ یا } \Rightarrow a < ۰ \quad (۳)$$

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر $a < -۶$ می شود.

حال اگر سهمی ریشه مضاعف داشته باشد (شکل ۲) یا ریشهٔ حقیقی نداشته باشد (شکل ۳)، داریم:

$$\Delta = (a-۲)(a+۶) \leq ۰ \Rightarrow -۶ \leq a \leq ۲ \quad (۴)$$

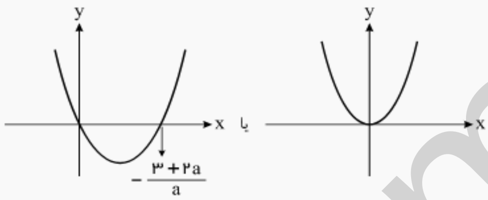
که اشتراک (۱) و (۴) برابر $-۶ \leq a \leq ۲$ است و اجتماع دو بازه جواب برابر $a \leq ۲$ می باشد.

.15

سهمی $y = ax^{۲} + (۳+۲a)x$ مبدأ گذر است، زیرا:

$$y = ۰ \Rightarrow ax^{۲} + (۳+۲a)x = ۰ \Rightarrow x(ax+۳+۲a) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ax+۳+۲a = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳+۲a}{a}$$

برای آن‌که سهمی از ناحیه سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشه معادله $y = ۰$ یعنی $x = -\frac{۳+۲a}{a}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$\text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow a > ۰ \Rightarrow -\frac{۳+۲a}{a} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳+۲a}{a} \leq ۰ \xrightarrow{a>۰} ۳+۲a \leq ۰ \Rightarrow ۲a \leq -۳ \Rightarrow a \leq -\frac{۳}{۲}$$

چون اشتراک $a > ۰$ و $a \leq -\frac{۳}{۲}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

.16

چون نمودار تابع درجهٔ دوم، بر نیمساز ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات $(y=-x; x>۰)$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف است:

$$\begin{cases} y = -۳x^{۲} + (۲m-۱)x + m - ۶ \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳x^{۲} + (۲m-۱)x + m - ۶ = -x$$

$$\Rightarrow -۳x^{۲} + ۲mx + m - ۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} (۲m)^{۲} - ۴(-۳)(m-۶) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴(\underbrace{m^{۲} + ۳m - ۱۸}_{(m+۶)(m-۳)}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۶ \\ m = ۳ \end{cases}$$

با توجه به این‌که محل تماس در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار دارد، پس ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $-۳x^{۲} + ۲mx + m - ۶ = ۰$ باید مثبت باشد:

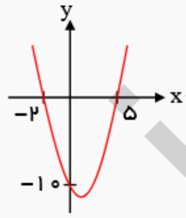
$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۲m}{۲(-۳)} > ۰ \Rightarrow \frac{m}{۳} > ۰ \Rightarrow m > ۰$$

پس $m = ۳$ قابل قبول است.

.17

کافی است تابع درجه‌ی دوم را رسم کنیم در این تابع چون ضریب $x^۲$ مثبت است تابع دارای Min است حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم.

$$y=۰\to x^۲-۳x-۱۰=۰\to (x-۵)(x+۲)=۰\to x=-۲, x=۵$$
$$x=۰\to y=-۱۰$$



واضح است اگر نمودار تابع f را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور xها غیر منفی می‌باشد.

.18

اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ‌دوم داده شده باشند طبق فرض داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}\to\frac{-b}{a}=\frac{۱}{\frac{c}{a}}\to\frac{-b}{a}=\frac{a}{c}\to a^۲=-bc\to a^۲+bc=۰\to ۹+(۲m-۱)(۲-m)=۰$$

$$\to ۹+۴m-۲m^۲-۲+m=۰\to ۲m^۲-۵m-۷=۰\xrightarrow{a+c=b} m=-۱, m=-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}$$

$$m=-۱\xrightarrow{\text{معادله}} ۳x^۲-۳x+۳=۰\to\Delta=۹-۳۶<۰\ \text{ریشهٔ حقیقی ندارد}$$

$$m=\frac{۷}{۲}\xrightarrow{\text{معادله}}۳x^۲+۶x-\frac{۳}{۲}=۰\to\Delta=۳۶+۱۸>۰\ \text{قابل قبول}$$

.19

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

با فرض این که x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، رابطهٔ $x'=\frac{x''}{۲}+۵$ بین آنها برقرار است.

$$x^۲-۸x+m=۰\Rightarrow\begin{cases}S=x'+x''=۸\Rightarrow\frac{۳x''}{۲}+۵=۸\Rightarrow\frac{۳x''}{۲}=۳\Rightarrow x''=۲\Rightarrow x'=\frac{۲}{۲}+۵=۶\\P=x'x''=m\Rightarrow ۶\times۲=m\Rightarrow m=۱۲\end{cases}$$

.20

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{m+۳}{m}\ ,\ x'x''=\frac{c}{a}=\frac{۵}{m}$$

فرض مسأله: $x'^۲+x''^۲=۶\Rightarrow(x'+x'')^۲-۲x'x''=۶\Rightarrow(\frac{m+۳}{m})^۲-\frac{۱۰}{m}-۶=۰$

$$\Rightarrow\frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}-۶=۰\xrightarrow{\times m^۲}m^۲+۶m+۹-۱۰m-۶m^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}m=۱\xrightarrow{\text{معادله}}x^۲-۴x+۵=۰\ :\ \ \Delta=۱۶-۲۰<۰\ \text{غ ق ق}\\ m=-\frac{۹}{۵}\to\text{با توجه به گزینه ها }\Delta>۰\text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست}\end{cases}$$

.21

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$ باشند، داریم:

$$\alpha = ۳\beta, \alpha\beta = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳\beta^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \beta^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \beta = \pm\frac{۲}{۳}$$

ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند، پس:

$$\beta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x^۲ - ax + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳ \times \frac{۴}{۹} - \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳} - \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \xrightarrow{\times ۳}$$

$$۴ - ۲a + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۱۶ = ۲a \Rightarrow a = ۸$$

$$\beta = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x^۲ - ax + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳ \times \frac{۴}{۹} + \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳} + \frac{۲a}{۳} + ۴ = ۰ \xrightarrow{\times ۳} ۴ + ۲a + ۱۲ = ۰ \Rightarrow a = -۸$$

اختلاف مقادیر $= ۸ - (-۸) = ۱۶$

روش دوم:

نکته: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر یکی از ریشه‌ها k برابر ریشه دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^۲}{ac} = \frac{(k+۱)^۲}{k}$$

طبق نکته فوق $k = ۳$ است و داریم:

$$۳x^۲ - ax + ۴ = ۰, k = ۳ \Rightarrow \frac{(-a)^۲}{۳ \times ۴} = \frac{(۳+۱)^۲}{۳} \Rightarrow \frac{a^۲}{۱۲} = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow a^۲ = \frac{۱۲ \times ۱۶}{۳} = ۶۴ \Rightarrow a = \pm ۸$$

.22

اگر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $۸x^۲ - mx - ۸ = ۰$ برابر $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ هستند.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱$$

داریم : $\alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{۸}$

$$\alpha^۳ \cdot \beta^۳ = (\alpha \cdot \beta)^۳ = (-۱)^۳ = -۱$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم : $x^۲ - Sx + P = ۰ \to x^۲ - \frac{۱۳}{۸}x - ۱ = ۰ \to ۸x^۲ - ۱۳x - ۸ = ۰$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۸x^۲ - mx - ۸ = ۰} m = ۱۳$$

.23

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با مرتب کردن معادلهٔ داده شده به معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ می‌رسیم. بنابراین:

$$S = \alpha + \beta = \frac{۳}{۲} \quad , \quad P = \alpha \cdot \beta = -\frac{۱}{۲}$$

هم چنین اگر S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها باشند، معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ نوشت.

ریشه‌های معادلهٔ $۸x^۲ + kx - ۱ = ۰$ ، $\alpha\beta^۲$ و $\alpha^۲\beta$ هستند، داریم:

$$S' = \alpha^۲\beta + \alpha\beta^۲ = \alpha\beta(\alpha+\beta) = P \cdot S = \frac{۳}{۲} \cdot (-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۴}$$

$$P' = \alpha^۲\beta \times \alpha\beta^۲ = \alpha^۳\beta^۳ = (\alpha\beta)^۳ = P^۳ = (-\frac{۱}{۲})^۳ = -\frac{۱}{۸}$$

بنابراین معادلهٔ متناظر به صورت $x^۲ + \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۸} = ۰$ می‌باشد. با ضرب طرفین معادله در عدد ۸، این معادله به صورت $۸x^۲ + ۶x - ۱ = ۰$ درمی‌آید و لذا $k = ۶$ است.

.24

می‌دانیم برای نوشتن معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^۲-۳x-۱=۰ \xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow[x\to x+۱]{\text{یک واحد کمتر}} -(x+۱)^۲-۳(x+۱)+۲=۰$$
$$\Rightarrow -x^۲-۲x-۱-۳x-۳+۲=۰ \Rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$$

.25

$$x^۲-x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱+x_۲=۱ \\ x_۱x_۲=-۴ \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ جدید را α و β می‌نامیم و S و P جدید می‌سازیم:

$$S_{new}=\alpha+\beta=({x_۲}^۳+\frac{۱}{x_۱})+({x_۱}^۳+\frac{۱}{x_۲})$$
$$=(۵x_۱+۴-\frac{x_۲}{۴})+(۵x_۲+۴-\frac{x_۱}{۴})=۸+(۵-\frac{۱}{۴})\times ۱=۱۳-\frac{۱}{۴}=\frac{۵۱}{۴}$$
$$P_{new}=({x_۲}^۳+\frac{۱}{x_۱})({x_۱}^۳+\frac{۱}{x_۲})$$
$$=(x_۱x_۲)^۳+{x_۲}^۲+{x_۱}^۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}=(-۴)^۳+(۱)^۲-۲(-۴)+\frac{۱}{-۴}$$
$$=-۶۴+۱+۸-\frac{۱}{۴}=-۵۵-\frac{۱}{۴}=\frac{-۲۲۱}{۴}$$

با S و P به دست آمده معادلهٔ جدید را می‌سازیم:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰ \Rightarrow ۴x^۲=۵۱x+۲۲۱$$

.26

طبق فرض داریم:

$$\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha^۲\beta\cdot\alpha\beta^۲ \xrightarrow{\div\alpha\beta} \alpha+\beta=\alpha^۲\beta^۲$$
$$\Rightarrow S=P^۲ \Rightarrow \frac{-b}{a}=(\frac{c}{a})^۲$$
$$\frac{-(-۸)}{a}=(\frac{۴}{a})^۲ \Rightarrow \frac{۸}{a}=\frac{۱۶}{a^۲} \Rightarrow a=۲$$

مقدار مورد نظر : $\log^{۲}_{\sqrt{۲}}=۲$

.27

رأس سهمی $y=-ax^۲+ax+۲$ را می‌یابیم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{a}{۲(-a)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}+۲=\frac{a}{۴}+۲$$
$$\text{رأس}(\frac{۱}{۲},\frac{a}{۴}+۲)$$

نقطهٔ فوق بر روی سهمی $y=۲bx^۲-bx-۱$ قرار دارد.

$$\frac{a}{۴}+۲=۲b\times\frac{۱}{۴}-\frac{b}{۲}-۱ \Rightarrow \frac{a}{۴}+۲=-۱ \Rightarrow \frac{a}{۴}=-۳ \Rightarrow a=-۱۲$$

حال رأس سهمی $y=۲bx^۲-bx-۱$ را می‌یابیم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{-b}{۲\times ۲b}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow y=۲b\times\frac{۱}{۱۶}-\frac{b}{۴}-۱=\frac{b}{۸}-\frac{b}{۴}-۱ \Rightarrow y=-\frac{b}{۸}-۱ \Rightarrow \text{رأس}(\frac{۱}{۴},-\frac{b}{۸}-۱)$$

نقطهٔ فوق بر روی سهمی $y=-ax^۲+ax+۲$ قرار دارد.

$$-\frac{b}{۸}-۱=-\frac{۹}{۱۶}+\frac{۹}{۴}+۲=\frac{۳۹}{۱۶}+۲ \xrightarrow{a=-۱۲} -\frac{b}{۸}-۱=\frac{-۳۶}{۱۶}+۲ \Rightarrow -\frac{b}{۸}-۱=-\frac{۹}{۴}+۲ \Rightarrow -\frac{b}{۸}=۳-\frac{۹}{۴}=\frac{۳}{۴}$$
$$\Rightarrow b=-۶ \Rightarrow b-a=-۶-(-۱۲)=۶$$

.28

$$\text{رأس سهمی}: x=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2k}=\frac{2}{k}\Rightarrow y=k\times\frac{4}{k^2}-4\times\frac{2}{k}-6=\frac{4}{k}-\frac{8}{k}-6$$
$$=\frac{-4-6k}{k}=\frac{-2(2+3k)}{k}$$

$$y=-4x-4\Rightarrow\frac{-2(2+3k)}{k}=-4\left(\frac{2}{k}\right)-4\Rightarrow\frac{2+3k}{k}=\frac{4}{k}+2\xrightarrow{k\neq0}2+3k=4+2k\Rightarrow k=2$$

$$y_s=\frac{-4-12}{2}=-8$$

.29

$$3x^2+(2m-1)x+m+\frac{4}{3}=-x\xrightarrow{\text{مماس هستند}}3x^2+2mx+m+\frac{4}{3}=0$$

حتماً معادلهٔ فوق باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس $\Delta=0$ خواهد بود و داریم:

$$\Delta=0\Rightarrow(2m)^2-4(3)\left(m+\frac{4}{3}\right)=0\Rightarrow4m^2-4(3)\left(m+\frac{4}{3}\right)=0$$
$$\xrightarrow{\div4}m^2-3\left(m+\frac{4}{3}\right)=0\Rightarrow m^2-3m-4=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1 & \times\\ m=4 & \checkmark\end{cases}$$

به ازای $m=-1$، محل برخورد دو تابع در ناحیهٔ دوم قرار نخواهد گرفت و $m=4$ قابل‌قبول است.

$$y=3x^2+7x+\frac{16}{3}\Rightarrow x_{\text{رأس سهمی}}=\frac{-b}{2a}=\frac{-7}{6}$$

.30

معادله را به صورت $mx^2+3x+m^2-2=0$ مرتب می‌کنیم.

$$x'=\frac{1}{x''}\Rightarrow x'x''=1\Rightarrow\frac{c}{a}=1\Rightarrow\frac{m^2-2}{m}=1\Rightarrow m^2-2=m\Rightarrow m^2-m-2=0$$

$$\Rightarrow(m-2)(m+1)=0\Rightarrow m=2\ ,\ m=-1$$

$$m=2\xrightarrow{\text{معادله}}2x^2+3x+2=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=9-16=-7<0$$ غیر قابل قبول

$$m=-1\xrightarrow{\text{معادله}}-x^2+3x-1=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=9-4=5>0$$ قابل قبول

.31

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}\ ,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

می‌توانیم معادلهٔ داده شده را حل کنیم و ریشه‌های آن را به سادگی به دست آوریم:

$$5x^2+3x=2\Rightarrow5x^2+3x-2=0\Rightarrow a+c=b\Rightarrow\begin{cases}x_1=\alpha=-1\\ x_2=\beta=\frac{-c}{a}=\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\alpha^2}=1\\ \frac{1}{\beta^2}=\frac{25}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1+\frac{25}{4}=\frac{29}{4}\\ P=\frac{1}{\alpha^2}\times\frac{1}{\beta^2}=\frac{25}{4}\end{cases}\Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

$$x^2-\frac{29}{4}x+\frac{25}{4}=0\xrightarrow{\times4}4x^2-29x+25=0\Rightarrow k=29$$

.32

روش اول: ریشه‌های معادله‌ی جدید از معکوس ریشه‌های معادلهٔ قبلی یک واحد بیشتر است.

$$۲x^۲-۳x-۴=۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها معکوس شده}} -۴x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها اضافه شده}} -۴(x-۱)^۲-۳(x-۱)+۲=۰$$

$$-۴x^۲+۸x-۴-۳x+۳+۲=۰ \Rightarrow -۴x^۲+۵x+۱=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

روش دوم:

ریشه‌های معادلهٔ قدیم را α و β و ریشه‌های معادلهٔ جدید را α' و β' می‌نامیم:

$$\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}, \alpha\beta=-۲ \quad , \quad \alpha'=\frac{۱}{\alpha}+۱ \quad , \quad \beta'=\frac{۱}{\beta}+۱$$

$$S'=\alpha'+\beta'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P'=\alpha'\beta'=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

$$x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

.33

از روی $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۲$ دو تا از ریشه‌ها یعنی α و β به دست می‌آیند.

$$x^۲-sx+p=۰ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۱ \end{cases}$$

$x=-۱$ را در معادلهٔ $۴x^۳+kx^۲-۹x-۲=۰$ قرار می‌دهیم.

$$۴(-۱)^۳+k-۹(-۱)-۲=۰ \Rightarrow -۴+k+۹-۲=۰ \Rightarrow k=-۳$$

.34

معادلهٔ استاندارد به‌صورت $a'x^۲+b'x+c'=۰$ است:

$$x^۲+۶x+a=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{-b'}{a'}=-۶ \\ P=\frac{c'}{a'}=a \end{cases}$$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|} \xrightarrow{\alpha<\beta<۰} \alpha-\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{-a'} \xrightarrow{a'=۱} \alpha-\beta=-\sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow \alpha-\beta=-\sqrt{۳۶-۴a}$$

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=\frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۱}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲)=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta}_{(\alpha+\beta)^۲}-۲\alpha\beta)+\frac{۱}{۲}((\alpha-\beta)(\alpha+\beta))=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(S^۲-۲P)-\frac{۱}{۲}(S\sqrt{\Delta})=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(۳۶-۲a)-\frac{۱}{۲}(-۶)(\sqrt{۳۶-۴a})=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow ۹۰-۵a+۳\sqrt{۳۶-۴a}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۹۰-۵a=۸۵ \Rightarrow a=۱ \\ ۳\sqrt{۳۶-۴a}=۱۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۳۶-۴a=۳۲ \Rightarrow a=۱ \end{cases}$$

.35

$$x^2+x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=-5 \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن x_1+1 و x_2+1 باشد برای این منظور کافی است از xها یک واحد کم کنیم:

$$(x-1)^2+(x-1)-5=0 \Rightarrow x^2-x-5=0$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha+\beta)=1 \quad , \quad \alpha\beta=-5$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha^3}$ و $\frac{1}{\beta^3}$ باشد:

$$S_{New}=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)^3}=\frac{(1)^3-3(1)(-5)}{-125}=-\frac{16}{125}$$

$$P_{New}=\frac{1}{\alpha^3}\times\frac{1}{\beta^3}=\frac{1}{(\alpha\beta)^3}=-\frac{1}{125}$$

$$\Rightarrow x^2-(-\frac{16}{125})x-\frac{1}{125} \Rightarrow 125x^2+16x-1=0$$

.36

$$S=\frac{-(-(a^2+b^2-12))}{1} \Rightarrow a+b=a^2+b^2-12$$

$$a+b=(a+b)^2-2ab-12 (I)$$

$$\text{از طرف}: P=\frac{a+b-1}{1} \Rightarrow ab=(a+b)-1$$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{جایگذاری در رابطهٔ}} a+b=(a+b)^2-2(a+b)+2-12$$

$$\Rightarrow (a+b)^2-3(a+b)-10=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{3+\sqrt{49}}{2} \Rightarrow a+b=5 & \text{قابل‌قبول} \checkmark \\ a+b=\frac{3-\sqrt{49}}{2} \Rightarrow a+b=-2 \end{cases}$$

.37

گام اول

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، باید رابطهٔ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2$ برقرار باشد.

گام دوم

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \Rightarrow A^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{S+2\sqrt{P}} \quad , \quad S=\frac{m+1}{2} \quad , \quad P=\frac{1}{16}$$

$$A=\sqrt{\frac{m+1}{2}+2(\frac{1}{4})}=2 \Rightarrow \sqrt{\frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}}=2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} \frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4 \Rightarrow \frac{m+1}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow m+1=7 \Rightarrow m=6$$

.38

با فرض $x^۲ - ۲x = t$ داریم:

$$t^۲ - t - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} x = ۱ \\ t = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

.39

$$|-\frac{b}{a} - (-\frac{c}{a})| = ۲ \Rightarrow |-\frac{b}{a} + \frac{c}{a}| = ۲ \Rightarrow |c - b| = ۲a \Rightarrow \begin{cases} c - b = ۲a \\ \text{یا} \\ c - b = -۲a \Rightarrow b - c = ۲a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c - b = ۲a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.

چون a یک رقم طبیعی است پس $۲a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

۱) اگر $c - b = ۲$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ وجود دارد. (۷ حالت)

۲) اگر $c - b = ۴$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ وجود دارد. (۵ حالت)

۳) اگر $c - b = ۶$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۷, ۸, ۹\}$ وجود دارد. (۳ حالت)

۴) اگر $c - b = ۸$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۹\}$ وجود دارد. (۱ حالت)

بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲(۱ + ۳ + ۵ + ۷) = ۲ \times ۱۶ = ۳۲$$

تذکر: باتوجه‌به اینکه به ازای $a, b, c \in \{۱, ۲, ..., ۹\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به‌دست‌آمده قابل‌قبول می‌باشد.

.40

$$x^۲ + ۶x + m = x^۲ + ۲x - ۳m \Rightarrow ۴x = -۴m \Rightarrow x = -m$$

$$x^۲ + ۲x - ۳m = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۳x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \,,\, x = -۵ \Rightarrow m = ۵$$

$$\begin{matrix} x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x + ۵)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۳, -۵ \\ x^۲ + ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow (x + ۵)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = -۱, -۵ \end{matrix} \Rightarrow ۳ - (-۱) = ۴$$

.41

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^۲ + x = t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲ + x = t} t^۲ - ۱۸t + ۷۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (t - ۱۲)(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t - ۱۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲ \\ t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = ۶ \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۴ \\ x_۲ = ۳ \end{cases}$$

$$t = ۶ \Rightarrow x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۳ = -۳ \\ x_۴ = ۲ \end{cases}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

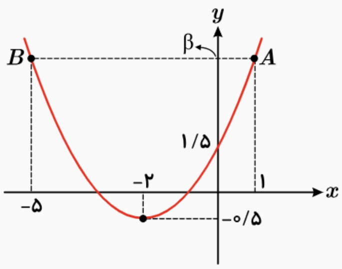
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = -۴ + ۳ - ۳ + ۲ = -۲$$

.42

پول علی و اکرم را به‌ترتیب x و y در نظر می‌گیریم:

$$x + y = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰ - y$$
$$(x-۱۰)(y+۱۰) = ۴۷۵ \xrightarrow{x=۱۰۰-y} (۱۰۰ - y - ۱۰)(y+۱۰) = ۴۷۵$$
$$\Rightarrow y^۲ - ۸۰y - ۴۲۵ = ۰ \Rightarrow (y-۸۵)(y+۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۸۵ \\ y = -۵ \end{cases}$$

.43



طول رأس $x = \dfrac{-۵+۱}{۲} = -۲ \to f(x) = a(x+۲)^۲ - \dfrac{۱}{۲}$

$(۰\,,\dfrac{۳}{۲}) \in f(x) \dfrac{۳}{۲} = a(۰+۲)^۲ - \dfrac{۱}{۲} \to a = \dfrac{۱}{۲}$

$(۱\,,\beta) \in f(x) \to \beta = \dfrac{۱}{۲}(۱+۲)^۲ - \dfrac{۱}{۲} \to \beta = ۴$

.44

$$\alpha + \beta = \frac{-(-۱۲)}{۳} = ۴ \Rightarrow \beta = ۴ - \alpha \ \ (۱)$$

$$۲\alpha^۲ + \beta^۲ - ۴a = ۷ \xrightarrow{(۱)} ۲\alpha^۲ + (۴-\alpha)^۲ - ۴\alpha = ۷ \Rightarrow ۳\alpha^۲ - ۱۲\alpha + ۹ = ۰ \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \alpha = ۳ \end{cases} \to a = -۹$$

$$\frac{a}{\alpha_{max}} = \frac{-۹}{۳} = -۳$$

.45

$$\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{(۲-x)^۲} = \frac{۴۰}{۹} \Rightarrow \frac{۲x^۲ - ۴x + ۴}{x^۲(۲-x)^۲} = \frac{۴۰}{۹} \Rightarrow ۴۰x^۲(x-۲)^۲ - ۱۸x(x-۲) - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{x(x-۲)=t}$$

$$۴۰t^۲ - ۱۸t - ۳۶ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۸ \pm \sqrt{۱۸^۲ + ۳۶ \times ۱۶۰}}{۸۰} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = x(x-۱) = \dfrac{۶}{۵} \Rightarrow x^۲ - x - \dfrac{۶}{۵} = ۰ \Rightarrow S_۱ = ۱ \\ t = x(x-۱) = \dfrac{-۳}{۴} \Rightarrow x^۲ - x + \dfrac{۳}{۴} = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموع ۴ ریشه برابر ۲ است.

.6

طرف سمت چپ را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{160}{9}\Rightarrow\frac{x^2+(x^2-2x+1)}{[x(1-x)]^2}=\frac{160}{9}\Rightarrow\frac{2(x^2-x)+1}{(x-x^2)^2}=\frac{160}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2-x=t}\frac{2t+1}{t^2}=\frac{160}{9}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{t^2+2t+1}{t^2}=\frac{160+9}{9}\Rightarrow(\frac{t+1}{t})^2=\frac{169}{9}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+\frac{1}{t}=\frac{13}{3}\\1+\frac{1}{t}=\frac{-13}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{t}=\frac{10}{3},\frac{-16}{3}\Rightarrow t=\frac{3}{10},\frac{-3}{16}\Rightarrow\begin{cases}x^2-x=\frac{3}{10}\\x^2-x=-\frac{3}{16}\end{cases}$$

هر دو معادله $x^2-x-\frac{3}{10}=0$ و $x^2-x+\frac{3}{16}=0$ دارای جواب هستند و مجموع ریشه‌های هر کدام برابر 1 است، پس مجموع جواب‌های معادله برابر $1+1=2$ است.

.46

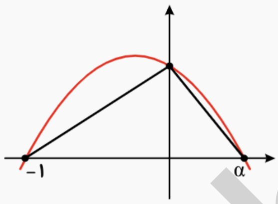
$$x^2-(a+1)x+a=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}}\begin{cases}x_1=1\\x_2=a\end{cases}\xrightarrow{\text{دو ریشه فرد متوالی}}a=3$$

$$x^2-(3a+1)x+b=0\xrightarrow{a=3}x^2-10x+b=0\xrightarrow[S=10]{\text{دو ریشه زوج متوالی}}\begin{cases}y_1=4\\y_2=6\end{cases}$$

$$y_1\times y_2-x_1\times x_2=24-3=21$$

.47

با توجه به آنکه مجموع ضریب جملهٔ درجه دوم و عدد ثابت با ضریب جملهٔ درجهٔ یک برابر است، از این رو یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $\frac{m+4}{m}$ است و داریم:



$$f(0)=-(m+4)\ ;\ |a-(-1)|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{16+4m^2+16m}}{|m|}=\frac{2|m+2|}{|m|}$$

$$S=\frac{|a-(-1)|\times|-(m+4)|}{2}\Rightarrow 3=\frac{\left|\frac{2(m+2)}{m}\times(m+4)\right|}{2}\Rightarrow m^2+6m+8=3|m|\xrightarrow{m<0}\begin{cases}m=-1\\m=-8\end{cases}$$

$$\xrightarrow{y=mx^2-4x-(m+4)}\begin{cases}\xrightarrow{m=-1}y=-x^2-4x-3\Rightarrow x_A=-2\\\xrightarrow{m=-8}y=-8x^2-4x+4\Rightarrow x_A=-\frac{1}{4}\end{cases}\rightarrow\left|-2-(-\frac{1}{4})\right|=\frac{7}{4}$$

.48

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m}{2} \end{cases} \Rightarrow$ مجموع ضرایب معادلهٔ روبه‌رو صفر است. $\Leftarrow y = 2x^2 - (m+2)x + m$

$x = 0 \Rightarrow y = m \qquad S = \frac{1}{2}|m(\frac{m}{2} - 1)| = \frac{3}{4} \Rightarrow |m(\frac{m}{2} - 1)| = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow |m(m-2)| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$ رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ $\begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$

.49

با توجه به اینکه ریشه‌های معادلهٔ اولی، نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ دومی بیشتر است بنابراین مجموع ریشه‌های معادلهٔ اولی، یک واحد از مجموع ریشه‌های معادلهٔ دومی بیشتر است.

$\alpha + \beta = \frac{a}{2} \ , \ \alpha' + \beta' = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1$

$\alpha\beta = \frac{b}{2} \ , \ \alpha'\beta' = (\alpha - 0.5)(\beta - 0.5) = \alpha\beta - 0.5(\underbrace{\cancel{\alpha + \beta}}_{0.5}) + 0.25 = -\frac{6}{2\alpha} = -3$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{b}{2} = -3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow [\frac{ab}{4}] = [-\frac{6}{4}] = -2$

.50

طبق فرض داریم:

$ax^2 - ax - b = 0 (*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-(-a)}{a} = 1 \\ \alpha\beta = \frac{-b}{a} \end{cases}$

$40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17 \xrightarrow{\alpha = 1 - \beta} 40\beta^2 + 20 + 20\beta^2 - 40\beta - 20\beta = 17 \Rightarrow 60\beta^2 - 60\beta + 3 = 0 \qquad (1)$

معادلهٔ (*) را ساده کرده و از رابطه استفاده می‌کنیم:

$a(x^2 - x) - b = 0 \xrightarrow{\beta:\text{ریشه}} a(\beta^2 - \beta) - b = 0 \xrightarrow{(1)} a(-\frac{3}{60}) = b \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{20} = \alpha\beta$

مقدار $|\alpha - \beta|$ برابر است با:

$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{1^2 - 4(\frac{1}{20})} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

.51

می‌دانیم که نمودار سهمی، نسبت به محور تقارن سهمی (که از رأس می‌گذرد)، متقارن است. دو نقطه $A(۳,y)$ و $B(-۵,y)$ که عرض برابری دارند نسبت به محور تقارن سهمی باید متقارن باشند، پس: $x_s = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_s = \frac{-۵+۳}{۲} = -۱$

همچنین عرض رأس برابر ۱ است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت روبه‌رو است:

$$y = a(x-(-۱))^۲ + ۱ = a(x+۱)^۲ + ۱$$

معادلهٔ سهمی را با محور xها تلاقی می‌دهیم:

$$a(x+۱)^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow ax^۲ + ۲ax + (a+۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-۲a}{a} = -۲ \\ \alpha\beta = \frac{a+۱}{a} \end{cases}$$

طبق فرض: $\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta \Rightarrow ۵ = ۴ - ۲(\frac{a+۱}{a}) \Rightarrow \frac{a+۱}{a} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow ۲a + ۲ = -a \Rightarrow a = \frac{-۲}{۳}$

$\Rightarrow$ معادلهٔ سهمی : $y = \frac{-۲}{۳}(x+۱)^۲ + ۱ \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{تلاقی با}} y = \frac{-۲}{۳}(۰+۱)^۲ + ۱ = \frac{-۲}{۳} + ۱ = \frac{۱}{۳}$

.52

کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیهٔ اول $(y=x)$ تلاقی دهیم و معادلهٔ تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادلهٔ تلاقی : $\begin{cases} y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ = x \Rightarrow \boxed{۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰}$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta = b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۴(۲)(m+۶) = m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$

$$\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴) = ۰ \Rightarrow m = ۱۲, -۴$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، طول نقطهٔ تماس مثبت است (در ناحیهٔ اول x مثبت است).

$m = ۱۲ \ : \ ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۰ \Rightarrow (x+۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۳$ غ ق ق

$m = -۴ \ : \ ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ ق ق

.53

با نوشتن شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی داریم:

$$x^۲ + ۲(a+۱)x + ۲a - ۱ = ۰$$

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} a^۲ = \alpha \cdot \beta = p \Rightarrow a^۲ = \frac{۲a-۱}{۱} = ۲a - ۱ \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

توجه کنید که به‌ازای $a = ۱$ معادلهٔ حاصل دارای دو ریشهٔ متمایز است.

$$x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴ = ۱۲ > ۰$$

.54

شیب خط داده‌شده به‌صورت $\frac{-۲m}{m^۲-۱}$ می‌شود که باید برابر $\tan ۶۰^\circ$ باشد، پس:

$$\frac{-۲m}{m^۲-۱} = \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}m^۲ + ۲m - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴+۱۲}}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow |m_۱ - m_۲| = \frac{۲\sqrt{۱۶}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$