فصل ۲ :بانک سوالات کنکور "معادله و نامعادله"

.1

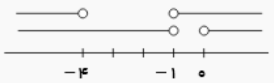
روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1}{1} > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -1 & & 0 & +\infty \\ \hline & + & \text{ت ن} & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{1} < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -4 & & -1 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & \text{ت ن} & - \end{array} \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

$\xrightarrow{\text{اشتراک } I, II}$  $\Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x = -5 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < \frac{11}{4} < 3$: درست $\Rightarrow$ گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند.

$x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < -1 < 3$: نادرست $\Rightarrow$ گزینهٔ چهارم حذف می‌شود.

.2

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \to \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{1} > 0 \to \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \to \frac{-x+2}{2x-1} > 0$$

$$\to \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & & 2 & +\infty \\ \hline & - & \text{ت ن} & + & 0 & - \end{array} \to \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \to \frac{x+1}{2x-1} - \frac{3}{1} < 0 \to \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \to \frac{-5x+4}{2x-1} < 0$$

$$\to \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & & \frac{4}{5} & +\infty \\ \hline & - & \text{ت ن} & + & 0 & - \end{array} \to x > \frac{1}{2} \text{ یا } x < \frac{4}{5} \quad (II)$$

$(0/8 < x < 2)$ از اشتراک I و II به جواب $\frac{4}{5} < x < 2$ می‌رسیم

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

$x = 1/5 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 1 < \frac{2/5}{2} < 3$: درست $\to$ گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند

$x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 1 < 2 < 3$: درست $\to$ گزینهٔ سوم حذف می‌شود

.3

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \to$$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
		+	ت ن	−	०	+	

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \to$$

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
		−	०	+	ت ن	−	

$$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1$$

$$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

.4

روش اول:

نامعادله‌ی داده شده را به دو نامعادله تبدیل کرده و از جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{3x+1}{x-3} > -1 \to \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \to \frac{3x+1+x-3}{x-3} > 0 \to \frac{4x-2}{x-3} > 0$$

$\to$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
عبارت > 0		+	०	−	ن	+	

$$\to x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 3 \qquad (I)$$

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \to \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \to \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \to \frac{10}{x-3} < 0 \to x-3 < 0 \to x < 3 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $x < \frac{1}{2}$ می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < \frac{4}{-2} < 3 \to$ نادرست است (گزینه‌های دوم و سوم و چهارم حذف می‌شوند).

.5

$-2 < y < 0 \Rightarrow -2 < \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow$ هیچ مقدار

.6

ابتدا نامعادلهٔ دوطرفهٔ $0 < \dfrac{1-3x}{x+1} < -2$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & \frac{1}{3} & \\ \hline \frac{1-3x}{x+1} & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-3x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 3 & \\ \hline \frac{3-x}{x+1} & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\Rightarrow -1 < x < 3 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(1) \cap (2) : \frac{1}{3} < x < 3$$

حال حدود $\dfrac{x}{2}$ و سپس $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0, 1$$

.7

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

با تعیین علامت عبارت $\dfrac{4-2x}{3x+1}$، نامعادلهٔ داده شده را حل می‌کنیم:

$$4-2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -\frac{1}{3} & 2 & +\infty & \\ \hline \frac{4-2x}{3x+1} & -1 & \text{تن} & + & 0 & - \end{array}$$

بنابراین $-\dfrac{1}{3} < x \leq 2$ و داریم:

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, \cdots, 6$$

مجموعه مقادیر $[3x]$ شامل ۸ عضو است.

.9

روش اول:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \to \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\to \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \to \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\to \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \to \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\to \frac{x-4}{x+1} < 0 \xrightarrow[\text{توجه کنید } x=2 \text{ مخرج را صفر می‌کند.}]{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
		$+$	ن	$-$	ن	$-$	0	$+$	

$$\to -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \to x \in (-1,2) \cup (2,4)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x = 0 \longrightarrow \frac{-8}{-2} > 0$: درست $\longrightarrow$ گزینهٔ دوم حذف می‌شود

$x = 3 \longrightarrow \frac{13}{4} > 3$: درست $\longrightarrow$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند

.13

البته مجموعهٔ نامعادله باید بازهٔ $(2,4)$ باشد نه $[2,4]$ از طرفی مخرج کسر به ازای $x > \frac{3}{2}$ همواره مثبت است.

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

در بازهٔ $(1,4)$ عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادلهٔ $(2,4)$ باشد در این بازه پرانتز اول نیز باید منفی باشد. در ضمن $x = 2$ ریشهٔ این عبارت است.

$$x = 2 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$if \quad m = 0 \Rightarrow (-x^2 + 4)$$

این عبارت در بازهٔ $(2,4)$ همواره منفی است و قابل قبول است.

$$if \quad m = 2 \Rightarrow (3x^2 - 8x + 4)$$

این عبارت در بازهٔ $(2,4)$ مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط $m = 0$ مورد قبول است.

.14

گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. توجه کنید که به دلیل وجود $\sqrt{x}$، باید $x \geq ۰$ باشد.

$$m=-۱ \Rightarrow P\frac{\overbrace{(۴x+۴)}^{\text{مثبت}}(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰$$

x		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴	
P			-	ت ن	+	۰	-	ت ن	+

$\Rightarrow$ جواب : $(۱\,,\,\frac{۳}{۲}] \cup (۴\,,\,+\infty)$

$$m=\frac{۱}{۳} \Rightarrow P=\frac{(-\frac{۸}{۹}x^۲-\frac{۴}{۳}x+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰ \xrightarrow{\times(-\frac{۹}{۴})} P=\frac{(۲x^۲+۳x-۹)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۳)(۲x-۳)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \leq ۰$$

عبارت $(۲x-۳)^۲$ همواره نامنفی است، پس $x=\frac{۳}{۲}$ یکی از جواب‌های نامعادله است. از طرفی به دلیل $x \geq ۰$، عبارت $x+۳$ مثبت است، پس:

$$(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)<۰ \Rightarrow ۱<x<۴$$

$x=\frac{۳}{۲}$ در بازهٔ $(۱\,,\,۴)$ قرار دارد، پس این بازه جواب نامعادله است.

$$m=۱ \Rightarrow P=\frac{(-۴x+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰$$

x		۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴	
P			-	ت ن	-	۰	+	ت ن	-

$\Rightarrow$ جواب : $[\frac{۳}{۲}\,,\,۴)$

$$m=\frac{۷}{۳} \Rightarrow P=\frac{(\frac{۴۰}{۹}x^۲-\frac{۲۸}{۳}x+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰ \xrightarrow{\times(\frac{۹}{۴})} P=\frac{(۱۰x^۲-۲۱x+۹)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(۵x-۳)(۲x-۳)^۲}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰$$

عبارت $(۲x-۳)^۲$ همواره نامنفی است، پس:

$$\xrightarrow{x \neq \frac{۳}{۲}} \frac{۵x-۳}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)} \geq ۰ \Rightarrow$$

x		۰		$\frac{۳}{۵}$		۱		۴	
P			-	۰	+	ت ن	-	ت ن	+

$\Rightarrow$ جواب : $[\frac{۳}{۵}\,,\,۱) \cup (۴\,,\,+\infty) \cup \{\frac{۳}{۲}\}$

.16

باید نامعادلهٔ $(x-۱)^{۲} > ۴x^{۴}$ را حل کنیم.

$$(x-۱)^{۲} > ۴x^{۴} \to \sqrt{(x-۱)^{۲}} > \sqrt{۴x^{۴}} \to |x-۱| > ۲x^{۲}$$

$$x \geq ۱ : x-۱ > ۲x^{۲} \to ۲x^{۲}-x+۱ < ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>۰,\Delta<۰} \varnothing \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$x < ۱ : -x+۱ > ۲x^{۲} \to ۲x^{۲}+x-۱ < ۰ \to$$

x	$-\infty$	-۱	$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
	$+$	۰ $-$	۰	$+$

$$\to -۱ < x < \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۱ < x < \frac{۱}{۲} \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $x \in (-۱, \frac{۱}{۲})$ می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲} - (-۱)$ است.

.17

$$x^4 < (x-2)^2 \Rightarrow x^2 < |x-2| \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow x^2 < -(x-2) \Rightarrow x^2+x-2<0 \Rightarrow -2<x<1 \\ x \geq 2 \Rightarrow x^2 < +(x-2) \Rightarrow x^2-x+2<0 \Rightarrow \Delta<0 \end{cases}$$

$$a=-2\ ,b=1 \Rightarrow b-a=3$$

.22

برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند.

$$۳a+\sqrt{۲a^{۲}+۴a}=۲ \Rightarrow \sqrt{۲a^{۲}+۴a}=۲-۳a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲a^{۲}+۴a=۴+۹a^{۲}-۱۲a \to ۷a^{۲}-۱۶a+۴=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۲۵۶-۱۱۲=۱۴۴} \begin{cases} a=\dfrac{۱۶+۱۲}{۱۴}=۲ \ \text{غ ق (در معادله صدق نمی‌کند.)} \\ a=\dfrac{۱۶-۱۲}{۱۴}=\dfrac{۲}{۷} \ \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+۱}{a}=\frac{\frac{۲}{۷}+۱}{\frac{۲}{۷}}=\frac{\frac{۹}{۷}}{\frac{۲}{۷}}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

.23

با استفاده از تغییر متغیر $x^{۲}+۴x+۵=t$ داریم:

$$x^{۲}+۴x+۵-۲=\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}\Rightarrow t-۲=\sqrt{t}\quad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t-۲\geq ۰\Rightarrow t\geq ۲$$

حال طرفین عبارت I را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(t-۲)^{۲}=(\sqrt{t})^{۲}\Rightarrow t^{۲}-۴t+۴=t\Rightarrow t^{۲}-۵t+۴=۰$$

$\Rightarrow$ { $t=۱\rightarrow$ با توجه به اینکه $t\geq ۲$ است، پس غیر قابل قبول است.

$t=\frac{c}{a}=۴\rightarrow x^{۲}+۴x+۵=۴\rightarrow x^{۲}+۴x+۱=۰\rightarrow \Delta=۱۶-۴=۱۲>۰$

حاصلضرب ریشه‌ها : $x_{۱}\cdot x_{۲}=\frac{c}{a}=۱$

.24

$$۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱\rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a\xrightarrow{\text{توان ۲}}۳a+۱۶=۱+۴a^{۲}-۴a$$

$\rightarrow ۴a^{۲}-۷a-۱۵=۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۴۹+۲۴۰=۲۸۹}$ { $a=\frac{۷+۱۷}{۸}=۳$ (در معادله صدق نمی‌کند) غ‌ق‌ق

$a=\frac{۷-۱۷}{۸}=\frac{-۵}{۴}$ ق‌ق

پس : $۴a+۹=۴(\frac{-۵}{۴})+۹=۴$

.25

$$\frac{x^{۲}-۲x+۴-x^{۲}+۹x+۲}{(x+۲)(x^{۲}-۲x+۴)}=\frac{۶x}{x^{۲}-۲x+۴}\Rightarrow\frac{۷x+۶}{x+۲}=۶x\Rightarrow ۶x^{۲}+۵x-۶=۰$$

$x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۱۲}=\frac{-۵\pm ۱۳}{۱۲}$ یک جواب مثبت

.26

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}-\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{۲-x}=t$ داریم:

$$\frac{۱}{۲+t}-\frac{۱}{۲-t}=\frac{t^{۲}}{۵t}=\frac{t}{۵}\Rightarrow\frac{۲-t-(۲+t)}{(۲+t)(۲-t)}=\frac{t}{۵}\Rightarrow\frac{-۲t}{۴-t^{۲}}=\frac{t}{۵}$$

یکی از ریشه‌های معادلهٔ فوق $t=۰$ است، داریم:

$$\frac{-۲}{۴-t^{۲}}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow ۴-t^{۲}=-۱۰\Rightarrow t^{۲}=۱۴\Rightarrow t=\pm\sqrt{۱۴}$$

چون $t=\sqrt{۲-x}\geq ۰$، پس $t=-\sqrt{۱۴}$ غیرقابل قبول است، داریم:

$$t=۰\Rightarrow\sqrt{۲-x}=۰\Rightarrow x=۲$$
$$t=\sqrt{۱۴}\Rightarrow\sqrt{۲-x}=\sqrt{۱۴}\Rightarrow ۲-x=۱۴\Rightarrow x=-۱۲$$

توجه کنید که $x=۲$ غیرقابل قبول است، زیرا در سمت راست معادله مخرج را صفر می‌کند، بنارابین معادله جواب مثبت ندارد.

.27

شرط معادله: $x>۱$

$$\frac{\sqrt{x+۱}}{۳+\sqrt{x-۱}}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۳-\sqrt{x-۱}}=\frac{x-۱}{\sqrt{x-۱}}\Rightarrow\sqrt{x+۱}\left(\frac{۱}{۳+\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{۳-\sqrt{x-۱}}\right)=\frac{x-۱}{(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}}$$
$$\Rightarrow\sqrt{x+۱}\left(\frac{۳-\sqrt{x-۱}-۳-\sqrt{x-۱}}{(۳+\sqrt{x-۱})(۳-\sqrt{x-۱})}\right)=(x-۱)^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\sqrt{x+۱}\times\frac{-۲\sqrt{x-۱}}{۹-(x-۱)}=\sqrt{x-۱}$$
$$\Rightarrow\frac{-۲\sqrt{x-۱}\times\sqrt{x+۱}}{۹-x+۱}=\sqrt{x-۱}$$

با توجه به معادلهٔ اصلی $x\neq ۱$ است و می‌توان $\sqrt{x-۱}$ را در معادله فوق از طرفین ساده کرد.

$$\frac{-۲\sqrt{x+۱}}{۱۰-x}=۱\Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=x-۱۰\quad(۱)\xrightarrow{\text{توان ۲}}۴(x+۱)=(x-۱۰)^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۲۰x+۱۰۰=۴x+۴$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۲۴x+۹۶=۰\Rightarrow\Delta=(-۲۴)^{۲}-۴\times۱\times۹۶=۱۹۲$$
$$x=\frac{۲۴\pm\sqrt{۱۹۲}}{۲}=\frac{۲۴\pm۸\sqrt{۳}}{۲}=۱۲\pm۴\sqrt{۳}$$

در معادله (۱) باید $x\geq ۱۰$ باشد که در این صورت فقط $x=۱۲+۴\sqrt{۳}$ قابل قبول است. پس معادله فوق فقط یک ریشه مثبت دارد.

.28

در سمت چپ معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۲x}-\sqrt{x^{۲}+۲x}}-\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۲x}+\sqrt{x^{۲}+۲x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x^{۲}-۲x}+\sqrt{x^{۲}+۲x})-(\sqrt{x^{۲}-۲x}-\sqrt{x^{۲}+۲x})}{(\sqrt{x^{۲}-۲x}-\sqrt{x^{۲}+۲x})(\sqrt{x^{۲}-۲x}+\sqrt{x^{۲}+۲x})}$$
$$=\frac{۲\sqrt{x^{۲}+۲x}}{\underbrace{(x^{۲}-۲x)-(x^{۲}+۲x)}_{-۴x}}=\frac{\sqrt{x^{۲}+۲x}}{-۲x}$$

حال معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x^{۲}+۲x}}{-۲x}=\frac{x+۵}{\sqrt{x^{۲}+۲x}}\Rightarrow x^{۲}+۲x=-۲x^{۲}-۱۰x$$
$$\Rightarrow ۳x^{۲}+۱۲x=۰\Rightarrow ۳x(x+۴)\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۴\ \checkmark\end{cases}$$

به ازای $x=۰$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس معادله فقط دارای یک جواب است.

.29

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مقداری نامنفی است، پس:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \to x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{2-x} \to 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

یعنی فقط $x = 2$ می‌تواند قابل قبول باشد که آن را امتحان می‌کنیم.

$$\underbrace{\sqrt{2 \times 2 - 3}}_{1} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2-2}}}_{\sqrt{2}} - \underbrace{\sqrt{2-2}}_{0} \quad \text{غ ق ق} \quad \times$$

در نتیجه معادلهٔ داده‌شده، فاقد ریشهٔ حقیقی است.

.30

لازم است زیر رادیکال‌ها نامنفی باشد، بنابراین داریم:

$$1) \ -x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \Rightarrow -x^2(x-4) + 25(x-4) \geq 0 \Rightarrow (x-4)(-x^2+25) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(5+x)(5-x) \geq 0$$

x		-5		4		5	
	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

$$\Rightarrow x \leq -5 \quad 4 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$2) \ -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(-x+4) \geq 0$$

x		2		4	
	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$

$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \quad (II)$$

لازم است ریشه متعلق به اشتراک جواب‌های به‌دست آمده باشد. اشتراک این دو جواب $\{4\}$ است؛ پس معادله نمی‌تواند ریشه‌ای غیر از $x = 4$ داشته باشد. به ازای $x = 4$ معادله به تساوی درست $2 + 4 = 6$ تبدیل می‌شود، پس $x = 4$ تنها ریشهٔ معادله است.

.31

اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به‌تنهایی در $k+9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 36 \\ k = -5 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

.32

می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v درنظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $۱۰۰ + v$ و در خلاف جهت حرکت آب $۱۰۰ - v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_۱ = \dfrac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + v} \\ \text{مسیر برگشت } t_۲ = \dfrac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - v} \end{cases} \Rightarrow t_۲ - t_۱ = ۵ \Rightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - v} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + v} = ۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲۰۰(۱۰۰ + v) - ۱۲۰۰(۱۰۰ - v)}{(۱۰۰ - v)(۱۰۰ + v)} = \frac{۱۲۰۰۰۰ + ۱۲۰۰v - ۱۲۰۰۰۰ + ۱۲۰۰v}{۱۰۰۰۰ - v^۲} = ۵$$

$$\Rightarrow ۲۴۰۰v = ۵(۱۰۰۰۰ - v^۲) \Rightarrow ۴۸۰v = ۱۰۰۰۰ - v^۲$$

$$\Rightarrow v^۲ + ۴۸۰v - ۱۰۰۰۰ = (v - ۲۰)(v + ۵۰۰) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = ۲۰ \text{ قق} \\ v = -۵۰۰ \text{ غقق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به‌راحتی به جواب $v = ۲۰$ برسید.

.33

می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت پرواز پرنده را v درنظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت $v + ۵$ و سرعت برگشت $v - ۵$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_۱ = \dfrac{۱}{v + ۵} \\ \text{مسیر برگشت } t_۲ = \dfrac{۱}{v - ۵} \end{cases} \Rightarrow t_۱ + t_۲ = \underbrace{۹}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{۱}{v + ۵} + \frac{۱}{v - ۵} = \frac{۹}{\underbrace{۶۰}_{\text{ساعت}}}$$

$$\Rightarrow \frac{v - ۵ + v + ۵}{(v + ۵)(v - ۵)} = \frac{۲v}{v^۲ - ۲۵} = \frac{۳}{۲۰} \Rightarrow ۳v^۲ - ۷۵ = ۴۰v$$

$$\Rightarrow ۳v^۲ - ۴۰v - ۷۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶۰۰ + ۹۰۰ = ۲۵۰۰} \begin{cases} v_۱ = \dfrac{۴۰ + ۵۰}{۶} = ۱۵ \text{ قق} \\ v_۲ = \dfrac{۴۰ - ۵۰}{۶} = \dfrac{-۵}{۳} \text{ غقق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به‌راحتی به جواب $v = ۱۵$ برسید.

.34

$$\begin{cases} ۱۱ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۴/۴ \\ ۴ \times \frac{۷۰}{۱۰۰} = ۲/۸ \end{cases} \rightarrow ۴/۴ + ۲/۸ = ۷/۲ \text{ جرم کل رنگ‌ها}$$

با فرض اینکه با تبخیر شدن x کیلوگرم رنگ، غلظت رنگ به ۵۰% می‌رسد، داریم:

$$\frac{۷/۲}{۱۵ - x} = \frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۵ - x = ۱۴/۴ \Rightarrow x = ۰/۶ \text{ کیلوگرم}$$

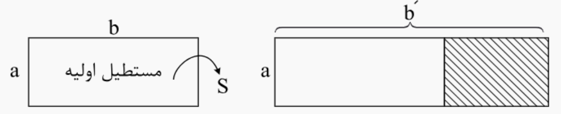
.35

به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی گویند.

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\xrightarrow{(\ )^2}\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

.36



$\frac{b}{a}=\frac{5}{4}$ ، مستطیل طلایی $\frac{b'}{a}=\frac{b'+a}{b'}\Rightarrow b'^2-ab'-a^2=0$

$$\Rightarrow\Delta=a^2+4a^2=5a^2\Rightarrow b'=\frac{a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{a\pm a\sqrt{5}}{2}=a\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\Rightarrow b'=a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ق ق $\quad\frac{s'}{s}=\frac{ab'}{ab}=\frac{a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\frac{5}{4}a}=\frac{2}{5}(1+\sqrt{5})=0/4(1+\sqrt{5})$