فصل 16 : بانک کنکور "مجموعه الگو و دنباله"

.1

بررسی گزینهٔ اول: $\{۲\} \in B$ است، پس $A \in B$ یک نتیجه‌گیری درست است.

بررسی گزینهٔ دوم: مجموعهٔ C فقط دو عضو به‌صورت $\{\{۲\}, ۳, ۵\}$ و ۲ دارد و $\{۲\} \notin C$، پس $A \in C$ یک نتیجه‌گیری نادرست است و همین گزینه جواب سؤال می‌شود.

بررسی گزینهٔ سوم: مجموعهٔ C عضوی به‌صورت $\{\{۲\}, ۵, ۳\}$ دارد، پس $B \in C$ یک گزارهٔ درست است.

بررسی گزینهٔ چهارم: $۲ \in C$ است؛ بنابراین $\{۲\}$ یک زیرمجموعهٔ تک عضوی برای مجموعهٔ C محسوب می‌شود پس $A \subseteq C$ یک نتیجه‌گیری درست است.

.2

اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟ *ریاضی خارج ۱۳۹۱*

۱) B' ۲) $\emptyset$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A - B$

$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$

$(A-B)$ و $(B-A)$ دو مجموعه ناسازگارند

.3

برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه‌ای مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود.

تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلتان به راحتی حل شود.

$A_i = [-i, \frac{۹ - i}{۲}]$

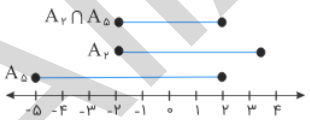
$A_۱ = [-۱, \frac{۹ - ۱}{۲}] = [-۱, ۴]$

$A_۲ = [-۲, \frac{۹ - ۲}{۲}] = [-۲, \frac{۷}{۲}]$

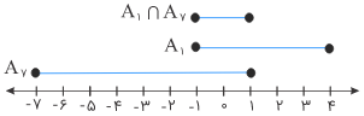
$A_۵ = [-۵, \frac{۹ - ۵}{۲}] = [-۵, ۲]$

$A_۷ = [-۷, \frac{۹ - ۷}{۲}] = [-۷, ۱]$

$A_۲ \cap A_۵ = [-۲, \frac{۷}{۲}] \cap [-۵, ۲] = [-۲, ۲]$



$A_۱ \cap A_۷ = [-۱, ۴] \cap [-۷, ۱] = [-۱, ۱]$



$(A_۲ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷) = [-۲, ۲] - [-۱, ۱] = [-۲, -۱) \cup (۱, ۲]$

AliAhmadiMath.ir

.4

گام اول

هر مجموعهٔ nعضوی، دارای ۲^n زیرمجموعه است که از میان آن‌ها $۲^n - ۱$ زیرمجموعه، ناتهی هستند.

گام دوم

با استفاده از ویژگی تفاضل و قانون دمورگان، داریم:

$$C = A \cap (A' - B)' = A \cap (A' \cap B')' = A \cap (A \cup B) = A$$

بنابراین تعداد عضوهای مجموعهٔ C برابر با تعداد عضوهای مجموعهٔ A است.

مجموعهٔ A دارای ۱۵ زیرمجموعهٔ ناتهی است؛ پس طبق گام اول، به‌طورکلی ۱۶ زیرمجموعه دارد؛ بنابراین مجموعهٔ A و درنتیجه مجموعهٔ C دارای ۴ عضو ($۲^۴ = ۱۶$ زیرمجموعه) است.

.5

باتوجه‌به مجموعه‌های A، B و C اعضای مجموعه‌های $A - B$ و $B - C$ را مشخص و پاسخ صحیح را تعیین می‌کنیم.

$$A - B = \{\{۱, ۲, ۳\}\} \Rightarrow A - B \neq C \ , \ A - B = \{C\}$$

$$B - C = \{\{۱, ۲\}\} \Rightarrow B - C \neq \varnothing \ , \ B - C \neq \{۱, ۲\}$$

.6

$$x = (A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B')) = ((A \cap A') \cup (A \cap B)) \cup ((B \cap A') \cup (B \cap B'))$$
$$= (A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \cap M = B$$

.7

رابطهٔ داده‌شده را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)') = (A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A' \cup B'))$$
$$= (A \cap (A \cap B')') \cup ((B \cap A') \cup (B \cap B'))$$
$$= (A \cap (A' \cup B)) \cup ((B \cap A') \cup \varnothing) = ((A \cap A') \cup (A \cap B)) \cup (B \cap A')$$
$$= (\varnothing \cup (A \cap B)) \cup (B \cap A') = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$
$$= (A \cup A') \cap B = U \cap B = B$$

.8

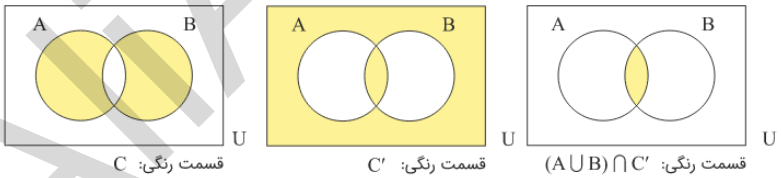
$$A' \cup B = A' \cap B' \Rightarrow A' \cup B = A' - B$$

از رابطهٔ بالا کاملاً مشهود است که مجموعهٔ B هیچ تأثیری در ۲ طرف تساوی ندارد و با در نظر گرفتن $B = \varnothing$ به رابطهٔ $A' = A'$ می‌رسیم که همواره برقرار است.

.9

$$(A' \cap B')' \cap C' = (A \cup B) \cap C'$$

می‌دانیم C برابر $(A - B) \cup (B - A)$ است. داریم:



بنابراین گزینهٔ "۱" صحیح است.

.10

می‌دانیم $A \cap B \subseteq B$ است، پس:

$$[(A \cap B) - B]' \cap [(A \cap B) \cup (A - B)] = [\varnothing]' \cap A = U \cap A = A$$

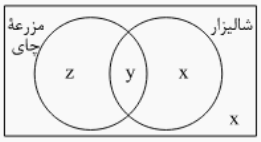
AliAhmadiMath.ir

.11

$$A' \cup \underbrace{((B \cap A) \cap \underbrace{[(B \cup A) \cap B]}_{B})}_{A \cap B} = (A - B)'$$

.12

با توجه به فرض، نمودار ون زیر را به همراه معادلات مربوطه می‌نویسیم:



$$\begin{cases} y+z=۳۷۰ \\ x+y=۲۰۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x+۲y=۴۰۰ \xrightarrow{\text{تفاضل}} z-y=۱۰۰ \\ ۲x+y+z=۵۰۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=۳۷۰ \\ z-y=۱۰۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲z=۴۷۰ \Rightarrow z=۲۳۵$$

.13

$$۸^{-\frac{۲}{۳}m} \times ۴^{-n} + ۴^{-m} \times ۸^{-\frac{۲}{۳}n} > \frac{۱}{۱۲۸}$$

$$۲^{-۲m} \times ۲^{-۲n} + ۲^{-۲m} \times ۲^{-۲n} > ۲^{-۷} \Rightarrow ۲ \times ۲^{-۲(m+n)} > ۲^{-۷}$$

$$\Rightarrow ۲^{m+n} < ۲^{۴} \Rightarrow m+n < ۴$$

چون m و n اعداد طبیعی‌اند، پس بیشترین مقدار $m^۳ + n^۲$ زمانی رخ می‌دهد که $m=۲$ و $n=۱$ باشد.

$$\max(m^۳ + n^۲) = ۲^۳ + ۱^۲ = ۹$$

.14

$$n(A) = m \quad , \quad n(B) = k$$

$$m - k = n(A) - n(B) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(A-B) + n(A \cap B) - (n(B-A) + n(A \cap B)) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(A-B) - n(B-A) = ۱۴ \quad (I)$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = ۲۰$$

$$\Rightarrow n(A-B) + n(B-A) = ۲۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I,II} \begin{cases} n(A-B) - n(B-A) = ۱۴ \\ n(A-B) + n(B-A) = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow n(B-A) = ۳$$

AliAhmadiMath.ir

.15

راه‌حل اول:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره ها	۵	۸	۱۱
		+۳ +۳	

تعداد دایره‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{12} = 5 + 11 \times 3 = 38$$

راه‌حل دوم:

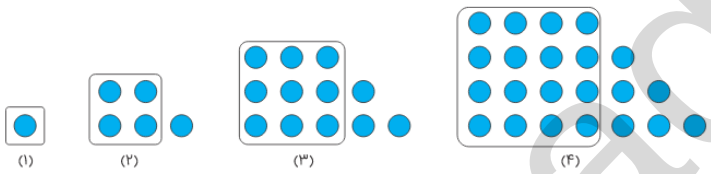
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 + 2 \times 2 \\ a_2 = 2 + 2 \times 3 \\ a_3 = 3 + 2 \times 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = n + 2 \times (n+1) = 3n + 2$$

بنابراین با یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $a_n = 3n + 2$ مواجه هستیم. جملهٔ دوازدهم الگو برابر است با:

$$a_{12} = 3\,(12) + 2 = 38$$

.16

الگوی داده‌شده را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:



طبق شکل داریم:

$$a_1 = 1^2 + 0 \;,\; a_2 = 2^2 + (0+1) \;,\; a_3 = 3^2 + (0+1+2) \;,\; \ldots$$
$$\Rightarrow a_n = n^2 + (0+1+2+\ldots+(n-1))$$

بنابراین در شکل نهم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$9^2 + (0+1+2+3+\ldots+8) = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 81 + 36 = 117$$

.17

اول جای nها، ۹۹ قرار می‌دهیم تا a_{99} به دست آید:

$$a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k-m}{m} = \frac{1}{a_{99}} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

الان به جای nها، ۹۸ می‌گذاریم:

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m-(k-m)}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} \Rightarrow a_{98} = \frac{k-m}{2m-k}$$

AliAhmadiMath.ir

.18

$$a_۱ = -۱\ ,\ a_۲ = ۲ + ۱ = ۳\ ,\ a_۳ = ۲ - \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۳}\ ,\ a_۴ = ۲ - \frac{۳}{۵} = \frac{۷}{۵}\ ,\ \ldots$$

دنبالهٔ موردنظر به‌صورت $a_n = \begin{cases} -۱ & ;n = ۱ \\ \frac{۲n-۱}{۲n-۳} & ;n \geq ۲ \end{cases}$ است:

$$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times \ldots \times a_{۱۰۰} = -۱ \times ۳ \times \frac{۵}{۳} \times \frac{۷}{۵} \times \ldots \times \frac{۱۹۹}{۱۹۷} = -۱۹۹$$

.19

ازآنجاکه تعداد جملات هر دسته، برابر با شمارهٔ آن دسته است، پس تعداد کل جملات ۴۰ دستهٔ اول برابر است با:

$$۱ + ۲ + \ldots + ۴۰ = \frac{۴۰ \times ۴۱}{۲} = ۸۲۰$$

همچنین جملهٔ عمومی اعداد طبیعی فرد متوالی به‌صورت $a_n = ۲n - ۱$ است، پس:

$$a_{۸۲۰} = ۲(۸۲۰) - ۱ = ۱۶۳۹$$

.20

دستهٔ اول : $\{۱\}$

دستهٔ دوم : $\{\underbrace{۲}_{۱+۱}, ۳, \underbrace{۴}_{۲^۲}\}$

دستهٔ سوم : $\{\underbrace{۵}_{۲^۲+۱}, ۶, ۷, ۸, \underbrace{۹}_{۳^۲}\}$

$\vdots$

دستهٔ هشتم : $\left\{\underbrace{۵۰}_{۷^۲+۱}, \ldots, \underbrace{۶۴}_{۸^۲}\right\}$

دستهٔ نهم : $\left\{\underbrace{۶۵}_{۸^۲+۱}, \ldots, \underbrace{۸۱}_{۹^۲}\right\}$

$$\Rightarrow \text{واسطهٔ حسابی} = \frac{۸۱ + ۶۵}{۲} = \frac{۱۴۶}{۲} = ۷۳$$

.21

دستهٔ اول ↓ ۱ , دستهٔ دوم ↓ ۲ , دستهٔ سوم ↓ ۳ , ...

پس تعداد کل جملات ۲۹ دستهٔ اول برابر است با:

$$\text{تعداد کل جملات ۲۹ دستهٔ اول} = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۲۹$$
$$= \frac{۲۹(۲۹ + ۱)}{۲} = \frac{۲۹ \times ۳۰}{۲} = ۴۳۵$$

پس اولین جملهٔ دستهٔ سی‌اُم، برابر با جملهٔ ۴۳۶اُم دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد است. دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد، یک دنبالهٔ خطی با جملهٔ عمومی $a_n = ۲n - ۱$ است، بنابراین:

$$\text{اولین جملهٔ دستهٔ ۳۰ام} = a_{۴۳۶} = ۲ \times ۴۳۶ - ۱ = ۸۷۱ = b_۱$$

دستهٔ سی‌اُم، ۳۰ جمله دارد، بنابراین جملهٔ آخر این دسته برابر است با:

$$b_{۳۰} = b_۱ + ۲۹d \xrightarrow[d=۲]{b_۱=۸۷۱} ۸۷۱ + ۲۹ \times ۲ = ۹۲۹$$

(توجه کنید که جملات هر دسته، یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت ۲ هستند)، بنابراین:

$$b_۱ + b_{۳۰} = ۸۷۱ + ۹۲۹ = ۱۸۰۰$$

AliAhmadiMath.ir

.22

در دستهٔ اول ۱، دستهٔ دوم ۲ و... و در دستهٔ بیستم، ۲۰ عدد داریم پس در کل به‌اندازهٔ $\frac{۲۰}{۲}(۱+۲۰)=۲۱۰$ عدد فرد داریم؛ بنابراین جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم، ۲۱۰ امین عدد فرد طبیعی $(۲n-۱)$ است.

$$۲\times ۲۱۰-۱=۴۱۹$$

.23

$$\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\},\{۱۳,۱۴,\dots,۲۴\},\dots$$

آخرین و بزرگ‌ترین عضو دسته‌ها (به جز دستهٔ اول) باهم تشکیل دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۲ می‌دهند:

$$a_۲=۳$$
$$a_۳=۳\times ۲^۱=۶$$
$$a_۴=۳\times ۲^۲=۱۲$$
$$\vdots$$
$$a_{۱۲}=۳\times ۲^{۱۰}=۳۰۷۲$$
$$a_{۱۳}=۳\times ۲^{۱۱}=۶۱۴۴$$

پس دستهٔ سیزدهم به‌صورت زیر است:

$$\{۳۰۷۳,۳۰۷۴,\dots,۶۱۴۴\}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۳۰۷۳+۶۱۴۴}{۲}=۴۶۰۸/۵$$

.24

چون q و $t_۱$ اعداد طبیعی هستند و دنباله دارای **۵** جمله است قطعاً جملات دنباله افزایشی هستند و جمله پنجم $t_۵=t_۱q^۴$ بزرگ‌ترین جمله دنباله است.

بنابراین q نمی‌تواند بزرگ‌تر از **۳** باشد زیرا:

$$q\geq ۴\Rightarrow q^۴\geq ۴^۴\Rightarrow q^۴\geq ۲۵۶\Rightarrow t_۵\geq ۲۵۶$$

$$q=۲\Rightarrow \begin{cases} t_۱=۱\Rightarrow \text{دنباله}: ۱,۲,۴,۸,۱۶ \\ t_۱=۲\Rightarrow \text{دنباله}: ۲,۴,۸,۱۶,۳۲ \\ t_۱=۳\Rightarrow \text{دنباله}: ۳,۶,۱۲,۲۴,۴۸ \\ t_۱=۴\Rightarrow \text{دنباله}: ۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴ \\ t_۱=۵\Rightarrow \text{دنباله}: ۵,۱۰,۲۰,۴۰,۸۰ \\ t_۱=۶\Rightarrow \text{دنباله}: ۶,۱۲,۲۴,۴۸,۹۶ \end{cases}$$

$$q=۳\Rightarrow t_۱=۱\Rightarrow \text{دنباله}: ۱,۳,۹,۲۷,۸۱$$

۷ دنباله با شرایط گفته شده وجود دارد.

.25

$$a_n=an^۲+bn+c$$
$$a_۵=۱۴\Rightarrow -\frac{۱}{۵}(۲۵)+۵b+c=۱۴\Rightarrow -۵+۵b+c=۱۴$$
$$a_۷=۱۷/۲\Rightarrow -\frac{۱}{۵}(۴۹)+۷b+c=۱۷/۲\Rightarrow -\frac{۴۹}{۵}+۷b+c=۱۷/۲$$
$$a=\frac{۱}{۷۰}(-a_۵)=-\frac{۱}{۵}$$

از حل دو معادله دو مجهول داریم:

$$b=۴,\ c=-۱$$
$$a_n=\frac{-۱}{۵}n^۲+۴n-۱$$
$$a_{۱۵}=-۴۵+۶۰-۱=۱۴$$
$$a_۱=-\frac{۱}{۵}+۴-۱=\frac{۱۴}{۵}$$
$$\frac{a_{۱۵}}{a_۱}=\frac{۱۴}{\frac{۱۴}{۵}}=۵$$

AliAhmadiMath.ir

.26

ده جملهٔ اول را می‌نویسیم و مجموع آن‌ها را برابر ۱۹ قرار می‌دهیم تا مقدار a به دست آید.

k	۰			۱			۲			۳		
n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
a_n	۱	۴	۱+a	۲	۲	۱+a	۴	۰	۲+a	۸	-۲	۲+a

$$a_۰ + a_۱ + a_۲ + \ldots + a_۹ = ۱۹ \Rightarrow (۶ + a) + (۵ + a) + (۶ + a) + ۸ = ۱۹$$
$$\Rightarrow ۳a + ۲۵ = ۱۹ \Rightarrow ۳a = -۶ \Rightarrow a = -۲$$

برای به دست آوردن جملهٔ ۲۹ام باید $a_{۲۸}$ را حساب کنیم که در ضابطهٔ دوم به جای k عدد ۹ قرار می‌دهیم.

$$k = ۹ \Rightarrow a_{۲۸} = -۲(۹) + ۴ = -۱۴$$

برای محاسبهٔ جملهٔ سی‌ام باید $a_{۲۹}$ را حساب کنیم که در ضابطهٔ سوم به جای k عدد ۹ قرار می‌دهیم:

$$k = ۹ \Rightarrow a_{۲۹} = [\frac{۲۹}{۹ + ۲}] - ۲ = [\frac{۲۹}{۱۱}] - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow \frac{a_{۲۸} + a_{۲۹}}{۲} = -۷$$

.27

$$\begin{cases} ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, \ldots & d_۱ = ۵ \\ ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \ldots & d_۲ = ۳ \end{cases}$$

اولین جملهٔ مشترک دو دنباله ۱۷ است. همچنین قدر نسبت دنبالهٔ جملات مشترک ک.م.م $d_۱$ و $d_۲$ یعنی $۳ \times ۵ = ۱۵$ است؛ بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ جملات مشترک عبارت است از:

$$a_n = ۱۷ + ۱۵(n - ۱) = ۱۵n + ۲$$

حال باید تعداد nهایی را بیابیم که به ازای آن‌ها $۱۰۰ \le a_n \le ۹۹۹$:

$$۱۰۰ \le ۱۵n + ۲ \le ۹۹۹ \Rightarrow ۹۸ \le ۱۵n \le ۹۹۷$$
$$\Rightarrow ۶/\ldots \le n \le ۶۶/\ldots \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{۷, ۸, \ldots, ۶۶\}$$

بنابراین تعداد جملات موردنظر برابر است با:

$$۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$$

.28

جمله‌های مشترک تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است.

$$۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ۳۰, ۳۷, \ldots \Rightarrow d_۱ = ۷$$
$$۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲, ۳۷, \ldots \Rightarrow d_۲ = ۵$$

اولین جملهٔ مشترک بین دو دنباله، ۳۷ است.

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \xrightarrow{d = |۷, ۵| = ۳۵} a_n = ۳۷ + ۳۵(n - ۱) = ۳۵n + ۲$$
$$۱۰۰ \le a_n < ۳۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \le ۳۵n + ۲ < ۳۰۰$$
$$\Rightarrow ۹۸ \le ۳۵n < ۲۹۸ \Rightarrow ۲/\ldots \le n < ۸/\ldots$$
$$۳ \le n \le ۸ \Rightarrow n \in \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

پس ۶ عدد با این شرایط داریم.

AliAhmadiMath.ir

.29

$$S=\frac{۱}{۲\times۵}+\frac{۱}{۵\times۸}+\frac{۱}{۸\times۱۱}+\ldots+\frac{۱}{۱۷\times۲۰}$$

$$۳S=\frac{۵-۲}{۲\times۵}+\frac{۸-۵}{۵\times۸}+\frac{۱۱-۸}{۸\times۱۱}+\ldots+\frac{۲۰-۱۷}{۱۷\times۲۰}$$

$$۳S=(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵})+(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸})+(\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۱})+\ldots+(\frac{۱}{۱۷}-\frac{۱}{۲۰})$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$۳S=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}\Rightarrow S=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow S=\frac{۳}{۲۰}\times\frac{۵}{۵}=\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۱۵$$

.30

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت (اختلاف مشترک) d و جملهٔ اول $a_۱$ برابر است با:

$$\underbrace{a_۱+۲d}_{t_۱},\underbrace{a_۱+۶d}_{t_۲},\underbrace{a_۱+۱۵d}_{t_۳}$$

$t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس داریم:

$$t_۲^{۲}=t_۱t_۳\Rightarrow(a_۱+۶d)^{۲}=(a_۱+۲d)(a_۱+۱۵d)$$

$$\Rightarrow a_۱^{۲}+۱۲a_۱d+۳۶d^{۲}=a_۱^{۲}+۱۷a_۱d+۳۰d^{۲}$$

$$\Rightarrow ۶d^{۲}-۵a_۱d=۰\Rightarrow d(۶d-۵a_۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d=۰\Rightarrow r=۱ & \text{(در گزینه‌ها نیست)}\\ ۶d-۵a_۱=۰\Rightarrow d=\frac{۵}{۶}a_۱ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$t_۱=a_۱+۲d=a_۱+۲\left(\frac{۵}{۶}a_۱\right)=\frac{۸}{۳}a_۱$$

$$t_۲=a_۱+۶d=a_۱+۶\left(\frac{۵}{۶}a_۱\right)=۶a_۱$$

درنتیجه قدر نسبت (نسبت مشترک) دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$r=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۶a_۱}{\frac{۸}{۳}a_۱}=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر جملات a_n، a_m و a_k از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدر نسبت (نسبت مشترک) دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$r=\frac{k-m}{m-n}$$

$a_۳$، $a_۷$ و $a_{۱۶}$ جملات یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

$$r=\frac{۱۶-۷}{۷-۳}=\frac{۹}{۴}$$

.31

دنبالهٔ حسابی را t_n با قدرنسبت d و الگوی خطی را a_n با قدرنسبت d' نمایش دهیم:

$$t_۸-t_۴=a_۷-a_۲\Rightarrow ۴d=۵d'\Rightarrow\frac{d'}{d}=\frac{۴}{۵}$$

$$a_{۱۰}=۰\Rightarrow a_۱+۹d'=۰\Rightarrow a_۱=-۹d'$$

$$\frac{a_{۱۵}}{d}=\frac{a_۱+۱۴d'}{d}=\frac{-۹d'+۱۴d'}{d}=۵\frac{d'}{d}=۵\times\frac{۴}{۵}=۴$$

.32

$$t_n=an+b$$

$$\begin{cases}t_۵=۸\\ t_{۱۰}=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵a+b=۸\\ ۱۰a+b=۵\end{cases}\Rightarrow ۵a=-۳\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}=-۰/۶$$

$$۵a+b=۸\xrightarrow{a=-۰/۶}-۳+b=۸\Rightarrow b=۱۱$$

$$t_{۱۶}=۱۶a+b=۱۶(-۰/۶)+۱۱=۱/۴$$

AliAhmadiMath.ir

.33

اگر مساحت هر مربع ۹ برابر قبلی باشد، یعنی طول ضلع آن ۳ برابر مربع درست‌شدهٔ قبلی است. پس محیط این مربع‌ها در هر مرحله سه برابر خواهد شد.

.34

جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه‌به اینکه $a_n = a_1 + (n-1)d$، داریم $a_2 = a_1 + d$، $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_{12} = a_1 + 11d$.

ازطرفی می‌دانیم که اگر x، y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه $y^2 = x.z$؛ پس باتوجه‌به فرض سؤال داریم:

$$a_5^2 = a_2.a_{12} \Rightarrow (a_1+4d)^2 = (a_1+d)\times(a_1+11d)$$
$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d \xrightarrow{d\neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d \ (*)$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنبالهٔ هندسی، از تقسیم دو جملهٔ متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنبالهٔ هندسی موردنظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

.35

اگر قدرنسبت این دنباله را q درنظر بگیریم، می‌توانیم سه جملهٔ متوالی آن را $\frac{a}{q}$، a و aq درنظر بگیریم. طبق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{q} + a + aq = 19 \quad (*) \\ (\frac{a}{q})(a)(aq) = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*),(**) \Rightarrow \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q + 6q^2 = 19q$$

$$\Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(6)(6)}}{2(6)} = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

در حالتی که $q = \frac{3}{2}$، ازآنجاکه $a = 6$، جمله‌ها به‌صورت $6, 6(\frac{3}{2}) = 9$ و $\frac{6}{\frac{3}{2}} = 4$ درمی‌آیند.

درحالتی که $q = \frac{2}{3}$، ازآنجاکه $a = 6$، جمله‌ها به‌صورت $6, 6(\frac{2}{3}) = 4$ و $\frac{6}{\frac{2}{3}} = 9$ درمی‌آیند.

پس در هر دو حالت، تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد برابر است با: $9 - 4 = 5$.

.36

جملات دنبالهٔ هندسی : $a,\ ar,\ ar^2 \xrightarrow{\text{در دنبالهٔ حسابی}} 4a,\ 8ar,\ 16ar^2$

$\xrightarrow{8ar \text{ واسطهٔ حسابی}} 16ar = 4a + 16ar^2$

$$4r = 1 + 4r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

مجموع مربعات : $a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 4a + 8ar + 16ar^2$

$$a^2(1 + r^2 + r^4) = 4a(1 + 2r + 4r^2) \Rightarrow a^2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = 4a(1 + 1 + 1)$$
$$\Rightarrow a \times \frac{16 + 4 + 1}{16} = 12 \Rightarrow a = \frac{12 \times 16}{21} \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

.37

دنبالهٔ با جملات ناصفر که هم حسابی و هم هندسی باشد، دنبالهٔ اعداد ثابت به‌صورت $a, a, \ldots$ است که $d = 0$ و $r = 1$ بوده و $r + d = 1$ است.

AliAhmadiMath.ir

.38

برای اینکه تعداد عضوهای A کمترین شود باید اشتراک A و B به حداقل برسد، یعنی: $n(A\cap B)=۰$

$$n(A)=m \quad , \quad n(B)=k$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۱ \xrightarrow{n(A\cap B)=۰} n(A)+n(B)=۱۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-k=۵ \\ m+k=۱۱ \end{cases} \Rightarrow ۲m=۱۶ \Rightarrow m=۸$$

توجه کنید که اگر تعداد اعضای اشتراک A و B عددی بزرگتر از صفر باشد، مقداری که برای m به دست می‌آید از ۸ بزرگ‌تر می‌شود. امتحان کنید!

.39

$$a_n=ar^{n-۱}$$

$$\frac{a_۶}{a_۲^۳}+\frac{a_۲}{a^۲}=۲ \Rightarrow \frac{ar^۵}{a^۳r^۳}+\frac{ar}{a^۲}=۲ \Rightarrow (\frac{r}{a})^۲+\frac{r}{a}-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{a}=۱ \\ \frac{r}{a}=-۲ \end{cases}$$

$$\frac{a^۲}{a_۲}=\frac{a^۲}{ar}=\frac{a}{r} \Rightarrow \frac{a}{r}=۱ \quad \text{یا} \quad \frac{a}{r}=-\frac{۱}{۲}$$

.40

$$a, a+d, a+۲d, \dots$$

$$۶(a+d)^۲=۵(a+۲d)a+۳(a+d)a$$

$$\Rightarrow ۶a^۲+۱۲ad+۶d^۲=۵a^۲+۱۰ad+۳a^۲+۳ad$$

$$\Rightarrow ۲a^۲-۶d^۲+ad=۰ \quad , \quad \frac{a}{d}=x \Rightarrow a=dx$$

$$\Rightarrow ۲d^۲x^۲-۶d^۲+d^۲x=۰ \Rightarrow d^۲(۲x^۲+x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow (۲x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}, x=-۲$$

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}=\frac{a}{d}+۳=x+۳ : \begin{cases} x=-۲ : x+۳=۱ \\ x=\frac{۳}{۲} \ : x+۳=۴/۵ \end{cases}$$

AliAhmadiMath.ir

.41

اگر جملات دنبالهٔ هندسی به‌صورت زیر باشند:

$$a_۱ , a_۲ , a_۳ , \dots$$

بنابراین جملات دنبالهٔ حسابی عبارتند از:

$$\frac{a_۱}{۲} , \frac{a_۲}{۲} , \frac{a_۳}{۲} , \dots$$

پس:

$$\frac{a_۲}{۲} = \frac{\frac{a_۱}{۲} + \frac{a_۳}{۲}}{۲} \Rightarrow ۲a_۲ = a_۱ + a_۳ \Rightarrow ۲a_۱r = a_۱ + a_۱r^۲$$
$$\xrightarrow{a_۱ \neq ۰} r^۲ - ۲r + ۱ = ۰ \Rightarrow r = ۱$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی ثابت است و $d = ۰$، پس:

$$r + d = ۱ + ۰ = ۱$$

AliAhmadiMath.ir