فصل 15 :بانک کنکور " آمار "

.1

گروه خونی افراد، یک متغیر کیفی اسمی است.

.2

ازآنجایی‌که نوع آلایندگی هوا می‌تواند به‌صورت آلایندگی مونوکسید کربن، دی‌اکسید کربن و غیره باشد، پس کیفی اسمی است. توجه کنید در این سؤال میزان آلایندگی هوا که کمّی پیوسته می‌باشد، سؤال نشده است.

.3

$$\bar{x} = ۱۳ \Rightarrow \frac{a + ۷ + ۱۰ + ۱۴ + ۱۱ + ۱۶ + ۱۸ + ۹ + ۲۰}{۹} = \frac{a + ۱۰۵}{۹} = ۱۳$$

$$\Rightarrow a + ۱۰۵ = ۱۱۷ \Rightarrow a = ۱۲$$

حالا با داشتن a، داده‌ها را مرتب می‌کنیم تا میانهٔ آن‌ها را پیدا کنیم:

$$۷ \quad ۹ \quad ۱۰ \quad ۱۱ \quad \underset{\text{میانه}}{۱۲} \quad ۱۴ \quad ۱۶ \quad ۱۸ \quad ۲۰$$

.4

نکته: در داده‌هایی که به صورت دنبالهٔ حسابی هستند، میانه و میانگین برابرند.

داده‌های آماری اعداد طبیعی متوالی هستند، پس جملات دنباله‌ای حسابی می‌باشند. بنابراین طبق نکته میانگین و میانه برابر است. با افزودن ۲ واحد به تمام داده‌ها، همچنان دنباله‌ای حسابی می‌باشد، بنابراین اختلاف میانه و میانگین برابر با صفر است.

.5

فرض می‌کنیم میانگین n دادهٔ کوچک‌تر از میانه برابر $\bar{x}$ و میانگین n دادهٔ بزرگ‌تر از میانه برابر $\bar{y}$ باشد. با توجه به صورت سؤال $\bar{x}+\bar{y}=۷$ است:

$$\overbrace{\bigcirc,\bigcirc\ldots\bigcirc,\bigcirc}^{n\text{ داده با میانگین }\bar{x}},\ ۳/۵\ ,\overbrace{\bigcirc,\bigcirc\ldots\bigcirc,\bigcirc}^{n\text{ داده با میانگین }\bar{y}}$$

پس میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\frac{n\bar{x}+n\bar{y}+۳/۵}{۲n+۱} = \frac{n(\bar{x}+\bar{y})+۳/۵}{۲n+۱} = \frac{۷n+۳/۵}{۲n+۱} = \frac{۳/۵(۲n+۱)}{۲n+۱} = ۳/۵$$

میانبر تعداد کل داده‌ها را ۳ تا در نظر می‌گیریم و سؤال را در حالت خاص حل می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها}: a, ۳/۵, b \xrightarrow{a+b=۷} \bar{x} = \frac{a+b+۳/۵}{۳} = \frac{۷+۳/۵}{۳}$$

$$= \frac{۱۰/۵}{۳} = ۳/۵$$

.6

میانگین داده‌ها با حذف داده‌های ناجور : $\bar{x} = \frac{۲۵ \times ۳۰ - (۵۰ + ۴۵ + ۱۵ + ۱۰)}{۲۵ - ۴} = \frac{۷۵۰ - ۱۲۰}{۲۱} = \frac{۶۳۰}{۲۱} = ۳۰$

با حذف داده‌ها، میانگین تغییری نکرد، بنابراین برای محاسبهٔ واریانس داده‌های باقی‌مانده، کافی است جملات مربوط به داده‌های ناجور را از واریانس حذف کنیم:

$$\sigma^۲ = (۸)^۲ = ۶۴ \Rightarrow (\sigma')^۲ = \frac{۶۴ \times ۲۵ - [(۱۰ - ۳۰)^۲ + (۱۵ - ۳۰)^۲ + (۴۵ - ۳۰)^۲ + (۵۰ - ۳۰)^۲]}{۲۵ - ۴}$$

$$= \frac{۱۶۰۰ - ۱۲۵۰}{۲۱} = \frac{۳۵۰}{۲۱} = ۱۶/۶۶$$

.7

$$\text{واریانس} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} \Rightarrow ۹ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{۱۸} \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۸} (x_i - ۲۵)^۲ = ۱۸ \times ۹ = ۱۶۲$$

ازآنجاکه میانگین سه دادهٔ آماری اضافه‌شده برابر ۲۵ می‌باشد $\left(\frac{۲۰+۲۷+۲۸}{۳} = ۲۵\right)$، بنابراین میانگین داده‌های جدید همان ۲۵ است.

$$\sigma'^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۲۱} (x_i - ۲۵)^۲}{۲۱} = \frac{\sum_{i=۱}^{۱۸} (x_i - ۲۵)^۲ + (۲۰-۲۵)^۲ + (۲۷-۲۵)^۲ + (۲۸-۲۵)^۲}{۲۱}$$
$$= \frac{۱۶۲+۲۵+۴+۹}{۲۱} = \frac{۲۰۰}{۲۱} \simeq ۹/۵۲$$

.8

اگر هیچ‌کدام از داده‌ها با میانگین برابر نباشند، مجموع انحرافات از میانگین نمی‌تواند صفر شود! چون ۸۳ داده داریم و امکان ندارد که جمع تعداد فردی از ۱+ یا ۱- باهم به صفر برسند، پس حداقل یکی از داده‌ها باید برابر میانگین باشد!

.9

$$\sigma = ۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۳^۲ + (-۱)^۲ + b^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ + a^۲}{۶}$$

$$a^۲ + b^۲ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۳ \quad (۱)$$

ازطرفی می‌دانیم جمع انحرافات از میانگین همواره صفر است یعنی:

$$۳ + (-۱) + b + (-۱) + ۰ + a = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \quad (۲)$$

$$a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab \xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۳ = ۱ - ۲ab \Rightarrow ab = -۶$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ = b \\ x = ۲ = a \end{cases}$$

.10

$$\sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۱ + b^۲ + ۹ + ۰ + a^۲ + ۹}{۶} \Rightarrow a^۲ = ۵ - b^۲$$

چون a و b اعدادی صحیح هستند، پس حتماً یکی از آن‌ها اندازهٔ ۱ دارد و دیگری اندازهٔ ۲. اما برای این‌که مجموع انحرافات از میانگین صفر شود، حتماً باید یکی از آن‌ها را منفی در نظر بگیریم. پس $ab = -۲$.

.11

می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است، بنابراین اختلاف چهار داده از میانگین برابر با ۱ و اختلاف چهار داده از میانگین نیز برابر با ۱- می‌باشد.

$$\sigma^۲ = \frac{۴(۱)^۲ + ۴(-۱)^۲ + ۰}{۹} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \sigma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

.12

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می‌گیریم تمام داده‌ها باهم برابرند و چون با افزودن ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند میانگین این ۳ عدد برابر یازده دادهٔ قبلی است.

$$\bar{x} = \frac{۲۴+۱۶+۲۶}{۳} = ۲۲$$

بنابراین باید انحراف معیار داده‌های زیر را حساب کنیم:

$$\underbrace{۲۲, \ldots, ۲۲}_{۱۱}, ۱۶, ۲۴, ۲۶, \bar{x} = ۲۲$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(۲۲-۱۶)^۲ + (۲۴-۲۲)^۲ + (۲۶-۲۲)^۲}{۱۴}} = ۲$$

.13

اگر داده‌های جامعهٔ اول را با x_i و داده‌های جامعهٔ دوم را با y_i نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12/6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151/2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7/2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$$

$$\Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 172/8$$

باتوجه‌به آنکه $\bar{x} = \bar{y}$، پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{324}{36} = 9$$

و درنتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر با $\sigma = 3$ است.

.14

گام اول: ابتدا میانگین تمام داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{X} = \frac{6 \times 12 + 9 \times 14}{6 + 9} = 13/2$$

گام دوم: رابطهٔ دوم واریانس را برای هرکدام از دسته داده‌ها می‌نویسیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum x_i^2}{n_1} - \bar{x}^2 \Rightarrow 6 = \frac{\sum x_i^2}{6} - 12^2 \Rightarrow \sum x_i^2 = 900$$

$$\sigma_2{}^2 = \frac{\sum y_i{}^2}{n_2} - \bar{y}^2 \Rightarrow 4 = \frac{\sum y_i{}^2}{9} - 14^2 \Rightarrow \sum y_i{}^2 = 1800$$

گام سوم: حال واریانس تمام داده‌های ترکیب‌شده را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i{}^2 + \sum y_i{}^2}{n_1 + n_2} - \bar{X}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{900 + 1800}{15} - (13/2)^2 \Rightarrow \sigma^2 = 5/76$$
$$\Rightarrow \sigma = 2/4$$

.15

انحراف معیار و میانگین داده‌های اولیه را به ترتیب با σ_x و $\bar{x}$ نشان می‌دهیم، در این صورت ضریب تغییرات این داده‌ها برابر می‌شود با:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad (*)$$

برای محاسبهٔ ضریب تغییرات داده‌های جدید داریم:

$$CV_{(2x+3)} = \frac{\sigma_{(2x+3)}}{\overline{2x+3}}$$

می‌دانیم $\begin{cases} \overline{ax+b} = a\bar{x} + b \\ \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \end{cases}$، پس:

$$CV_{(2x+3)} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x} + 3} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{CV_{(2x+3)}}{CV_x} = \frac{\frac{2\sigma_x}{2\bar{x}+3}}{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}} = \frac{2\bar{x}}{2\bar{x} + 3}$$

باتوجه‌به فرض سؤال $\bar{x} = 12$، پس نسبت ضریب تغییرات داده‌های جدید به ضریب تغییرات داده‌های اولیه، برابر است با:

$$\frac{2 \times 12}{2 \times 12 + 3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

.16

n زوج: $x_1, x_2, \dots, x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}, \dots, x_n$

$$-\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\right)=\left(\frac{x_{\frac{n}{2}+1}+\dots+x_n}{\frac{n}{2}}\right)-6$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{\frac{n}{2}}=6\Rightarrow 2\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)=6\Rightarrow 2\bar{x}=6\Rightarrow \bar{x}=3$$

.17

راه‌حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=\frac{5+7+3\times 8+2\times 10}{7}=\frac{12+24+20}{7}=\frac{56}{7}=8$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

واریانس:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$=\frac{(5-8)^2+(7-8)^2+3\times(8-8)^2+2\times(10-8)^2}{7}$$

$$=\frac{9+1+0+8}{7}=\frac{18}{7}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار}: \sigma=\sqrt{\frac{18}{7}}=3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8}=\frac{3}{8}\times 0/534\simeq 0/20$$

راه‌حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$-3,-1,0,0,0,2,2$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\frac{2+2-1-3}{7}=0$$

$$\sigma^2=\frac{2\times 2^2+(-1)^2+(-3)^2}{7}=\frac{18}{7}\quad\Rightarrow \sigma=3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\bar{x}_{\text{اصلی}}=\bar{x}_{\text{جدید}}+8=0+8=8$$

$$\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{اصلی}}}=\frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8}\simeq 0/20$$

.18

میانگین و واریانس داده‌ها را می‌نویسیم:

① $\bar{x}=\dfrac{a+a+a+1+2}{5}=3\Rightarrow 3a+3=15\Rightarrow a=4$

② $\sigma^2=\dfrac{3\times(4-3)^2+(2-3)^2+(1-3)^2}{5}=\dfrac{4+1+3}{5}$

$$\Rightarrow \sigma^2=\frac{8}{5}=\frac{16}{10}\Rightarrow \sigma=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

③ $CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}=\dfrac{\frac{4}{\sqrt{10}}}{3}=\dfrac{4}{3\sqrt{10}}$

.19

سه عدد زوج متوالی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$x-۲\,,\,x\,,\,x+۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{(-۲)^۲+۰^۲+۲^۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

میانگین هر سه عدد زوج متوالی عدد وسط است و چون در محاسبه ضریب تغییرات، میانگین در مخرج قرار دارد، بنابراین برای یافتن کوچک‌ترین ضریب تغییرات بزرگ‌ترین میانگین را انتخاب می‌کنیم که متعلق به سه‌تایی $\{۹۴,۹۶,۹۸\}$ می‌باشد: $\overline{X}=۹۶$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}{۹۶} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}\times ۴۸} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$$

نکته: واریانس سه عدد زوج متوالی برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{d^۲}{۱۲}(N^۲-۱) = \frac{۴}{۱۲}(۹-۱) = \frac{۱}{۳}\times ۸ = \frac{۸}{۳}$$

.20

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_n}{n} = \frac{۵\times ۱۰+۴\times ۱۱+۷\times ۱۴}{۱۶} = \frac{۵۰+۴۴+۹۸}{۱۶} = \frac{۱۹۲}{۱۶} = ۱۲$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{واریانس}\ \sigma^۲ = \frac{(x_۱-\overline{x})^۲+(x_۲-\overline{x})^۲+\ldots+(x_n-\overline{x})^۲}{n}$$
$$= \frac{۵\times(۱۰-۱۲)^۲+۴\times(۱۱-۱۲)^۲+۷\times(۱۴-۱۲)^۲}{۱۶}$$
$$= \frac{۵\times ۴+۴\times ۱+۷\times ۴}{۱۶} = \frac{۲۰+۴+۲۸}{۱۶} = \frac{۵۲}{۱۶} = \frac{۱۳}{۴}$$
$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲۴} \simeq ۰/۱۵$$

راه‌حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها}: \underbrace{۰,۰,\ldots,۰}_{\text{۵ تا}}\,,\,\underbrace{۱,\ldots,۱}_{\text{۴ تا}}\,,\,\underbrace{۴,۴,\ldots,۴}_{\text{۷ تا}}$$

$$\overline{x}_{\text{کوچک}} = \frac{۰+۴(۱)+۷(۴)}{۱۶} = \frac{۳۲}{۱۶} = ۲$$
$$\sigma^۲ = \frac{۵(-۲)^۲+۴(-۱)^۲+۷(۲)^۲}{۱۶} = \frac{۵۲}{۱۶} = \frac{۱۳}{۴}$$
$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$
$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{کوچک}} + ۱۰ = ۲+۱۰ = ۱۲$$
$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲} \simeq ۰/۱۵$$

.21

باتوجه‌به صورت مسئله اعداد دستهٔ دوم همگی زوج تک‌رقمی و غیرتکراری هستند پس اعداد دستهٔ دوم ۲, ۴, ۶, ۸ خواهند بود. درنتیجه اعداد دستهٔ اول ۹ ,۷ ,۳ ,۱ می‌باشند.

داریم:

$$\{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+3+7+9}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10}$$

$$\{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{2}$$

.22

در گروه اول $\overline{X}_1 = 80$ و $\sigma_1 = 5$ و در گروه دوم $\overline{X}_2 = 72$ و $\sigma_2 = 4$ است. برای دو گروه، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\overline{X}_1} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\overline{X}_2} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

چون $CV_2 < CV_1$ است، پس گروه دوم بهتر است.

.23

برای مقایسهٔ دقت عمل دو دستگاه، باید ضریب تغییرات مربوط به دو دستگاه را به دست آوریم.

$$\text{دستگاه } A : CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{3/6}{150} = 0/024$$

$$\text{دستگاه } B : CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{3/84}{160} = 0/024$$

چون ضریب تغییرات دو دستگاه یکسان است؛ پس دقت عمل دو دستگاه نیز یکسان می‌باشد.

.24

ضریب تغییرات نمرات آزمون هر کارگری کمتر باشد به منزلهٔ آن است که دقت بیشتری دارد.

$$\bar{x}_A = \frac{15+14+15+16+17+19}{6} = 16$$

$$\bar{x}_B = \frac{16+14+17+14+17+18}{6} = 16$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + 2^2}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\sigma_B^2 < \sigma_A^2 \Rightarrow \sigma_B < \sigma_A \xrightarrow{\bar{x}_A = \bar{x}_B} CV_B < CV_A$$

پس دقت عمل B بیشتر است.

.25

نکتهٔ ۱: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه میانگین داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه میانگین داده‌ها نیز با آن عدد ثابت جمع می‌شود.

نکتهٔ ۲: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه انحراف معیار داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

ابتدا با استفاده از روابط گام اول، میانگین و انحراف معیار x_iها را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به دو نکتهٔ بالا، میانگین و انحراف معیار u_iها و در آخر ضریب تغییرات آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

$$\bar{x} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = ۱۲\bar{x} + ۶ = ۱۲\,(۳) + ۶ = ۴۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱-۳)^۲ + (۲-۳)^۲ + (۳-۳)^۲ + (۴-۳)^۲ + (۵-۳)^۲}{۵} = \frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{۲} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = ۱۲\sigma = ۱۲\left(\sqrt{۲}\right) = ۱۲\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۴۲} \simeq \frac{۲ \times ۱/۴}{۷} = ۰/۴$$

.26

$$A : ۱۲ \quad ۱۳ \quad ۱۴ \quad ۱۵ \quad ۱۶ \Rightarrow \bar{x}_A = ۱۴$$
$$B : ۱۱/۵ \quad ۱۳ \quad ۱۵/۵ \quad ۱۶ \quad ۱۶/۵ \Rightarrow \bar{x}_B = ۱۴/۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} \quad , \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\sigma_A^۲ = \frac{(۱۲-۱۴)^۲ + (۱۳-۱۴)^۲ + ۰ + (۱۵-۱۴)^۲ + (۱۶-۱۴)^۲}{۵} = \frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{۲}}{۱۴}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{(۱۱/۵-۱۴/۵)^۲ + (۱۳-۱۴/۵)^۲ + (۱۵/۵-۱۴/۵)^۲ + (۱۶-۱۴/۵)^۲ + (۱۶/۵-۱۴/۵)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۹+۲/۲۵+۱+۲/۲۵+۴}{۵} = \frac{۱۸/۵}{۵} = ۳/۷ \Rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$$

CV_A کوچک‌تر است، پس کارگر A دقت بیشتری دارد.

27.

دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی را به شکل زیر نشان می‌دهیم (دسته اول):

$۲k, ۲k + ۲, ۲k + ۴, ۲k + ۶, ۲k + ۸, ۲k + ۱۰, ۲k + ۱۲$

اعداد متوالی و تعدادشان فرد است، پس میانگین برابر عدد وسط است یعنی $۲k + ۶$

$\overline{x} = ۲k + ۶$

از همه اعداد موجود در دسته $۲k$ را کم می‌کنیم و مطمئن هستیم که انحراف معیار دسته ایجاد شده با انحراف معیار دسته قبلی برابر است:

دسته جدید : $۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲$

$\sigma = ۴$

در سؤال گفته شده در دسته اول میانگین دو برابر انحراف معیار است پس: $\overline{x} = ۸$.

$\overline{x} = ۲k + ۶ = ۸ \Rightarrow ۲k = ۲ \Rightarrow k = ۱$

میانگین دسته آخر، مجذور انحراف معیار است، پس:

دسته اول : داده وسط $=$ میانگین $= ۸$

دسته آخر : داده وسط $= \sigma^۲ = ۱۶$

اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر برابر اختلاف داده‌های وسط دو دسته است: $۱۶ - ۸ = ۸$

28.

نکته: واریانس n دادهٔ آماری که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲} \times d^۲$$

انحراف معیار ۷ عدد طبیعی متوالی برابر است با: $\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ - ۱}{۱۲}} = ۲$

اگر ۷ دادهٔ اول را $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ فرض کنیم، میانگین برابر ۴ دارند و انحراف معیار ۲ که نصف میانگین است. دسته‌ای که میانگین (داده وسطی) آن $\sigma^۳ = ۸$ است، دستهٔ $۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱$ می‌باشد. کوچک‌ترین عضو دسته اول برابر ۱ و کوچک‌ترین عضو دسته آخر برابر ۵ است. پس اختلاف آن‌ها $۵ - ۱ = ۴$ می‌باشد.

29.

$۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹$

باید اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین باشند. بنابراین همهٔ اعداد زوج $۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸$ را کنار می‌گذاریم. از اعداد باقی‌مانده که فرد هستند $(۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹)$ به‌صورتی دوتا دوتا انتخاب می‌کنیم که اختلاف آن‌ها تکراری نباشد و همچنین بیشترین میانگین شود. بنابراین داریم:

$۱۷ - ۹ = ۸$
$۱۹ - ۱۳ = ۶$
$۱۵ - ۱۱ = ۴$

درنتیجه دنبالهٔ اعداد زیر حاصل می‌شود:

$۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸$

حال انحراف معیار این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{۴ + ۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۶ + ۱۸}{۸} = \frac{۸۸}{۸} = ۱۱$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ + ۵^۲ + ۳^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲}{۸}} = \sqrt{\frac{۲(۴۹ + ۲۵ + ۹ + ۱)}{۸}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۸۴)}{۸}} = \sqrt{۲۱}$$