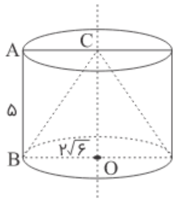
فصل ۱۴: بانک سوالات کنکور " هندسه دوازدهم"

.1

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:

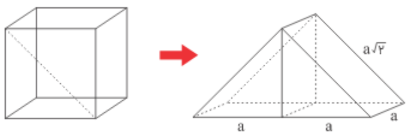


$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) - \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) = \frac{۲}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۲۴)(۵) = ۸۰\pi$$

.2

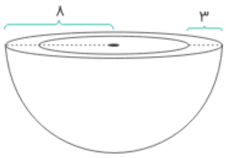
مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = ۲(a \times a\sqrt{۲} + a \times a + ۲ \times \frac{a^۲}{۲}) = ۲(a^۲\sqrt{۲} + ۲a^۲) = a^۲(۴ + ۲\sqrt{۲})$$



.3

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیم‌کرهٔ درونی، نیم‌کرهٔ بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایرهٔ دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

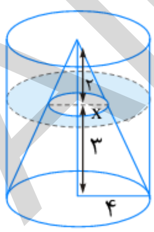
$$S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۶۴) = ۲\pi \times ۶۴ = ۱۲۸\pi$$

$$S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۲۵) = ۲\pi \times ۲۵ = ۵۰\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(۶۴ - ۲۵) = ۳۹\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} + S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = ۱۲۸\pi + ۵۰\pi + ۳۹\pi = ۲۱۷\pi$$

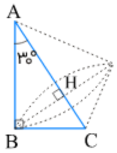
.4



$$\text{نسبت تشابه}: \frac{x}{۴} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$$
$$S = \pi(۴)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$

.5

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول وتر AC، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH)، شعاع قاعدهٔ این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = ۸ \Rightarrow BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$
$$BC^۲ = AC.CH \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times CH$$
$$\Rightarrow CH = ۲ \Rightarrow AH = ۸ - ۲ = ۶$$
$$BH^۲ = AH.CH = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times AH + \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times CH$$
$$= \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۶ + \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۲$$
$$= ۲۴\pi + ۸\pi = ۳۲\pi$$

.6

گام اول

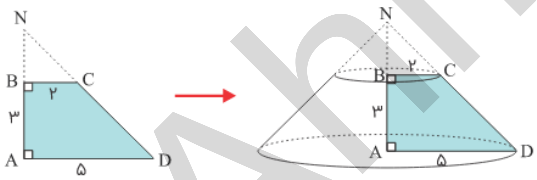
الف) در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.

ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطهٔ $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

ذوزنقهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $N\overset{\Delta}{B}C$ و $N\overset{\Delta}{A}D$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران ذوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $N\overset{\Delta}{B}C$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $N\overset{\Delta}{A}D$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه‌به اینکه $BC || AD$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+۳} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ۵BN = ۲BN + ۶ \Rightarrow ۳BN = ۶ \Rightarrow BN = ۲$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } N\overset{\Delta}{A}D} - V_{\text{دوران مثلث } N\overset{\Delta}{B}C}$$
$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ \times ۵ - \frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲ \times ۲ = \frac{۱}{۳}\pi\,(۱۲۵ - ۸) = \frac{۱۱۷}{۳}\pi = ۳۹\pi$$

.7

باتوجه‌به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکتهٔ ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

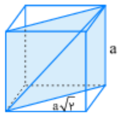
نکتهٔ ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه‌به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{۳}{۲}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۲)^۲ \times ۵ - \frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۳ = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = ۱۵/۵\pi$$

.8

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است. باتوجه‌به مساحت مستطیل، اندازهٔ a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right) = ۹\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲\sqrt{۲} = ۹\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

.9

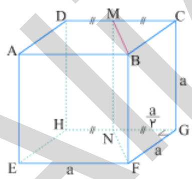
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های EF، FG، AE، BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN||BF$ و درنتیجه صفحهٔ گذرنده از BF و M، از نقطهٔ N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را $V_۱$، حجم بزرگ‌تر را $V_۲$ و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^۳$$

$$V_۱ = S_{\overset{\Delta}{GFN}} \times CG = \frac{۱}{۲}(a)(\frac{a}{۲})(a) = \frac{a^۳}{۴}$$

$$\Rightarrow V_۲ = V - V_۱ = \frac{۳a^۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۱}{۳}$$



.10

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲,-۱)$ و $F(۲,۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷-(-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

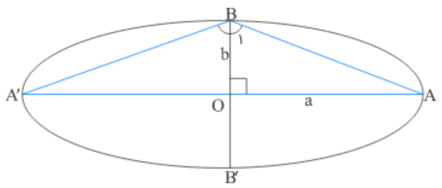
.11

$$e = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a^۲-b^۲}{a^۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱ - (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{۳} \quad (*)$$

حال باتوجه‌به شکل زیر، داریم:



$$\overset{\triangle}{OAB} : \tan \hat{B}_۱ = \frac{a}{b} \xrightarrow{(*)} \tan \hat{B}_۱ = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۲\hat{B}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

.12

$$\begin{cases} c = ۱۲ \\ ۲b = ۱۸ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow a = ۱۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

.13

طبق فرض، داریم:

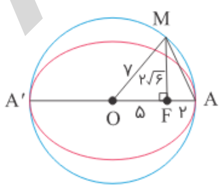
$$\left.\begin{array}{l} AA' = ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷ \\ BB' = ۲b = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} ۴۹ = ۲۴ + c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۲۵ \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow OF = ۵ \xrightarrow{OA=a=۷} AF = ۷ - ۵ = ۲$$

$$\text{شعاع دایره است } OM \Rightarrow OM = OA = a = ۷$$

$$\overset{\triangle}{OFM} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow FM^۲ = OM^۲ - OF^۲ = ۴۹ - ۲۵ = ۲۴ \Rightarrow FM = ۲\sqrt{۶}$$

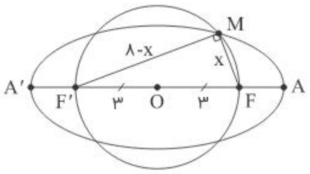
$$\overset{\triangle}{AFM} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow AM = \sqrt{FM^۲ + FA^۲} = \sqrt{۲۴ + ۴} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$



.14

اولاً طبق فرض، داریم:

$$۸ > ۲\sqrt{۷} \Rightarrow ۲a = ۸\ ,\ \ ۲b = ۲\sqrt{۷} \Rightarrow a = ۴\ ,\ \ b = \sqrt{۷}$$
$$\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} ۱۶ = ۷ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۹ \Rightarrow c = ۳$$



در دایره به قطر FF'، زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر FF' است؛ پس $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$.

حال چون M روی بیضی قرار دارد، $MF + MF' = ۲a = ۸$. پس اگر $MF = x$، آنگاه $MF' = ۸ - x$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow x^۲ + (۸-x)^۲ = ۶^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۶x + ۶۴ = ۳۶$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۶x + ۲۸ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \pm \sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow{MF<MF'} x = ۴ - \sqrt{۲}$$

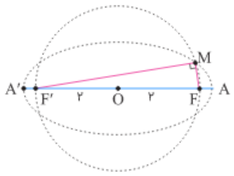
.15

باتوجه‌به معلومات سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ} = ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ \text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c = ۲$$

پس $OF = OF' = ۲$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$



.16

قطرهای بیضی در مرکز بیضی متقاطع‌اند، پس:

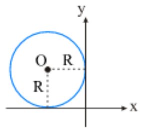
$$\begin{array}{r} -۳\times \\ ۲\times \end{array}\begin{cases} ۲y - ۳x = ۳ \\ ۳y + ۲x = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۶y + ۹x = -۹ \\ ۶y + ۴x = ۲۲ \end{cases} \Rightarrow ۱۳x = ۱۳ \Rightarrow x = ۱, y = ۳$$

پس مختصات مرکز بیضی $(۱,۳)$ است و فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{۳^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۱۰}$$

.17

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-1\,,\,2)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R\,,\,R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$$

چون دایره از نقطهٔ $(-1\,,\,2)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

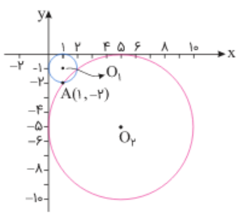
$$\xrightarrow{x=-1\,,\,y=2}(-1+R)^2+(2-R)^2=R^2\Rightarrow 1-2R+R^2+4-4R+R^2=R^2$$

$$\Rightarrow R^2-6R+5=0\Rightarrow (R-5)(R-1)=0\Rightarrow\begin{cases}R-5=0\Rightarrow R=5\\ R-1=0\Rightarrow R=1\end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$2R=2(5)=10$$

.18



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(1,-2)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع r هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

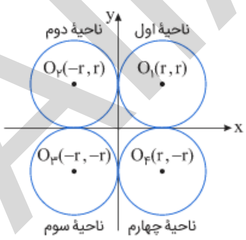
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2\xrightarrow{(1,-2)}(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2\Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0\Rightarrow\begin{cases}r=1\\ r=5\end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:



.19

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A\,(۱, ۰)$ و $B\,(۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O\,(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O\,(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

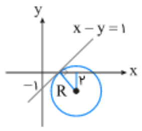
.20

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$

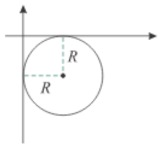


$$\text{معادلهٔ دایره}: (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۰} (x - ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

.21

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $(۲, -۹)$ نیز عبور کند به‌صورت زیر است:



ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(x_۰, y_۰)$ و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x - R)^۲ + (y + R)^۲ = R^۲$$

چون هر دو دایره از نقطهٔ $(۲, -۹)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۲, y=-۹} (۲ - R)^۲ + (-۹ + R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴ - ۴R + R^۲ + ۸۱ - ۱۸R + R^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۲۲R + ۸۵ = ۰ \Rightarrow (R - ۱۷)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱۷ \\ R = ۵ \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

.22

دایرهٔ اول:

$$x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۵$$

$$O_۱(۲, -۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$$

دایرهٔ دوم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۳$$

$$O_۲(۰, ۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$$

$$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$$

$$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$$

$$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$$

$$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$$

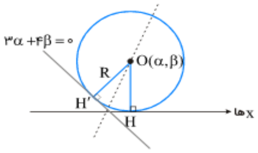
پس دو دایره متقاطع‌اند.

.23

مرکز دایره را نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ درنظر می‌گیریم. باید فاصلهٔ O از محور xها با فاصلهٔ آن از خط $۳x+۴y=۰$، برابر باشد:

$$OH=OH' \Rightarrow |\beta|=\frac{|۳\alpha+۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|۳a+۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha+۴\beta=۵\beta \\ ۳\alpha+۴\beta=-۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha=\beta \\ ۳\alpha=-۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O(\alpha,۳\alpha) \\ \text{مرکز}: O(\alpha,-\frac{۱}{۳}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیهٔ اول است، پس فقط $O(\alpha,۳\alpha)$ قابل‌قبول است؛بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R=OH=۳ \Rightarrow \beta=۳\alpha=۳ \Rightarrow \alpha=۱$$

.24

$$\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۶)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۲y+۳۶=۴x^۲+۴y^۲$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۱۲y-۴۵=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲+y^۲+۲x+۴y-۱۵=۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۲۰ \Rightarrow O(-۱,-۲)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵} \Rightarrow ۲r=۴\sqrt{۵}$$

.25

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$
$$\xrightarrow{\text{(۰,۰) را صدق می‌دهیم}} c=۰$$
$$\xrightarrow{\text{(۲,۱) را صدق می‌دهیم}} ۴+۱+۲a+b=۰$$
$$\xrightarrow{\text{(۱,−۲) را صدق می‌دهیم}} ۱+۴+a-۲b=۰$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{matrix} \xrightarrow{\times ۲} ۴a+۲b=-۱۰ \\ a-۲b=-۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵a=-۱۵ \Rightarrow a=-۳, b=۱$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲+(۱)^۲-۴(۰)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

.26

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^۲+(\frac{b}{۲})^۲-c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۲\,,\,۱)$، $(-۲\,,\,۴)$ و $(۰\,,\,۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$
$$\xrightarrow{(۲,۱)} ۲^۲+۱^۲+a(۲)+b(۱)+c=۰ \Rightarrow ۴+۱+۲a+b+c=۰ \Rightarrow ۲a+b+c=-۵ \qquad (I)$$
$$\xrightarrow{(-۲,۴)} (-۲)^۲+۴^۲+a(-۲)+b(۴)+c=۰ \Rightarrow ۴+۱۶-۲a+۴b+c=۰ \Rightarrow -۲a+۴b+c=-۲۰ \quad (II)$$
$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰^۲+۰^۲+a(۰)+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰ \qquad (III)$$

با جایگذاری $c=۰$ در دو معادلهٔ I و II، به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

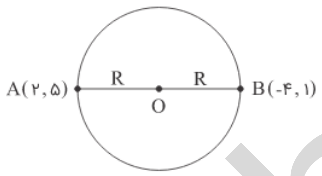
$$\begin{cases} ۲a+b=-۵ \\ -۲a+۴b=-۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b=-۲۵ \Rightarrow b=-۵$$
$$۲a+b=-۵ \xrightarrow{b=-۵} ۲a-۵=-۵ \Rightarrow ۲a=۰ \Rightarrow a=۰$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R=\sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲+(\frac{-۵}{۲})^۲-۰}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

.27

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.

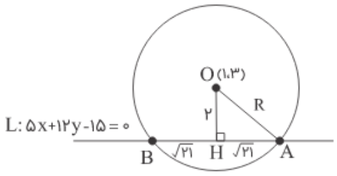


حال داریم:

$$O \Rightarrow O=\frac{A+B}{۲}=(-۱\,,\,۳)$$ وسط AB است.
$$R=|OA|=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$
$$\Rightarrow \text{دایره}:(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۳$$
$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور } x \text{ ها}} (x+۱)^۲+(۰-۳)^۲=۱۳$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲=۴ \Rightarrow x+۱=\pm۲ \Rightarrow x=۱\,,\;x=-۳$$

.28

از مرکز دایره بر خط $L: ۵x + ۱۲y - ۱۵ = ۰$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{۲۱}$ و داریم:



$$|OH| = \frac{|۵(۱) + ۱۲(۳) - ۱۵|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OHA} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (\sqrt{۲۱})^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow \text{دایره} : (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

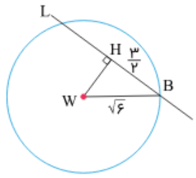
حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادلهٔ دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow x - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow x = -۳ \, , \, x = ۵$$
$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور } x \text{ ها} : (-۳ \, , ۰) \, , \, (۵ \, , ۰)$$
$$\Rightarrow \text{طول پاره‌خط حاصل} = ۵ - (-۳) = ۸$$

.29

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$W(۲, -۱) \quad , \quad r = \sqrt{۴ + ۱ + ۱} = \sqrt{۶}$$



$$|WH| = \frac{|-۲ + ۲ - a|}{\sqrt{۱ + ۴}} = \frac{|a|}{\sqrt{۵}}$$

$$\overset{\Delta}{WHB} : ۶ = \frac{۹}{۴} + \frac{a^۲}{۵} \Rightarrow \frac{a^۲}{۵} = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow a^۲ = \frac{۷۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \\ a_۲ = -\frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \Rightarrow |a_۱ - a_۲| = ۵\sqrt{۳}$$

.30

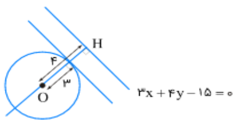
در آغاز معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴ \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱ - ۱) + (y^۲ + ۴y + ۴ - ۴) = ۴$$
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱ + ۴ + ۴ = ۹$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{۹} = ۳, \quad O = (۱, -۲)$$

فاصلهٔ هر نقطه مانند $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ که $a^۲ + b^۲ \neq ۰$، برابر است با $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$، پس فاصلهٔ مرکز دایره $O = (۱, -۲)$ تا خط $۳x + ۴y - ۱۵ = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|۳(۱) + ۴(-۲) - ۱۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

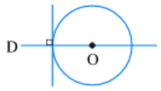
فاصلهٔ یک نقطه تا یک خط برابر با اندازهٔ عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصلهٔ مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. ازآنجاکه هر قطر دایره، در نقطهٔ تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط موردنظر طبق شکل زیر، برابر می‌شود با $d_{\min} = ۴ - ۳ = ۱$.



.31

خط به معادلهٔ $3x+2y=a$ از مرکز دایره می‌گذرد، پس قطر دایره است.

باتوجه‌به آنکه قطر $3x+2y=a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس شکل زیر را داریم:



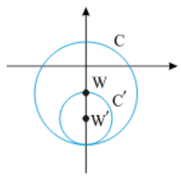
مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$x^2+y^2-2x+y=1 \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1,-\frac{1}{2})$$

$$3(1)+2(-\frac{1}{2})=a \Rightarrow a=2$$

.32

$$x^2+y^2+2y-3=0 \Rightarrow W(0,-1)\ ,\ r=2$$



درواقع چون دایرهٔ بزرگ‌تر از $(0,-3)$ عبور می‌کند، پس نقطهٔ تماس همین نقطه است و همچنین $W'(0,-2)$ و $r'=1$ خواهد بود.

$$C':\ (x-0)^2+(y+2)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+4y+3=0$$

.33

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^2+y^2-2x=3 \xrightarrow{y=mx+2} x^2+(mx+2)^2-2x=3 \Rightarrow x^2+m^2x^2+4mx+4-2x=3$$
$$\Rightarrow (m^2+1)x^2+(4m-2)x+1=0$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow (4m-2)^2-4(m^2+1)(1)=0 \Rightarrow 16m^2-16m+4-4m^2-4=0$$
$$\Rightarrow 12m^2-16m=0 \Rightarrow m(12m-16)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ 12m-16=0 \Rightarrow m=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \end{cases}$$

.34

چون دایره بر دو خط موازی $y=2x$ و $y=2x+10$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y=2x+5$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است.

$$\text{فاصله دو خط}=\frac{|10-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \Rightarrow R=\sqrt{5}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصلهٔ مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$R=\sqrt{x^2+(2x+5)^2} \Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{5x^2+20x+25}$$
$$\Rightarrow 5(x^2+4x+4)=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=2(-2)+5=1$$
$$\text{مرکز دایره}=(-2,1)$$

.35

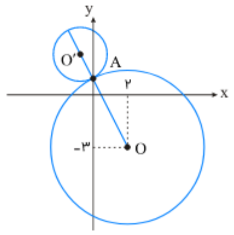
ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۱ - ۴ + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O_۱ : (۱, -۲),\ R_۱ = ۲$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow \sqrt{(۱-(-۲))^۲ + (-۲-۲)^۲} = ۲ + R_۲ \Rightarrow ۵ = ۲ + R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۳$$

.36



مطابق شکل، مراکز دو دایرهٔ مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایرهٔ C' در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (۲, -۳)$ و $A = (۰, ۱)$، داریم:

$$m_{OA} = \frac{۱-(-۳)}{۰-۲} = -۲$$

معادلهٔ خط OA : $y - ۱ = -۲(x - ۰) \Rightarrow y = -۲x + ۱$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(-۱, ۳)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است و در معادلهٔ خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-۱, ۳)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(۰+۱)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

.37

۳۷- دو دایره با شعاع یکسان در نقاط (۱,۴) و (۳,۲) همدیگر را قطع میکنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره ، دو برابر فاصله بین نقاط تقاطع باشد، فاصله بین نقاط برخورد یکی از دایره ها با محور x ها کدام است ؟ آزمون مجدد ۴۰۱

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

$$C_۱ : (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \quad و \quad C_۲ : (x-\alpha')^۲ + (y-\beta')^۲ = R^۲$$

مختصات مرکز دایره را $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ درنظر می‌گیریم:

$$\sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۴)^۲} = \sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۲)^۲} \Rightarrow y = x + ۱$$

بنابراین مختصات مرکز دایره‌ها $(\alpha, \alpha+۱)$ و $(\alpha', \alpha'+۱)$ هستند.

$$\sqrt{(۳-۱)^۲ + (۴-۲)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} \longrightarrow OO' = ۴\sqrt{۲} = \sqrt{(\alpha-\alpha')^۲ + (\alpha+۱-\alpha'-۱)^۲} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow \alpha' = \alpha + ۴$$

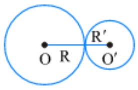
$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{صدق در دایره}]{(۱,۴)} (۱-\alpha)^۲ + (۴-\alpha-۱)^۲ = R^۲ \\ \xrightarrow[\text{صدق در دایره}]{(۳,۲)} (۳-\alpha)^۲ + (۲-\alpha-۱)^۲ = R^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = ۰ \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_۱ : x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰ \\ C_۲ : (x-۴)^۲ + (y-۵)^۲ = ۱۰ \end{array}\right.$$

دایره $C_۲$ با محور x برخورد ندارد. پس نقاط برخورد $C_۱$ را با محور xها به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[y=۰]{\text{برخورد } C_۱ \text{ با محور } x \text{ها}} x^۲ + (-۱)^۲ = ۱۰ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳ \longrightarrow \text{فاصله نقاط برخورد} = ۶$$

.38

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ - ۴ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} O = (-۲, ۰) \\ R = \sqrt{۴} = ۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۱ + (y+۴)^۲ - ۱۶ + a = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۴)^۲ = ۱۷ - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (۱, -۴) \\ R' = \sqrt{۱۷ - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (۰+۴)^۲} = ۵ \\ R + R' = ۲ + \sqrt{۱۷-a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'|=R+R'} ۵ = ۲ + \sqrt{۱۷ - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۷ - a} = ۳ \Rightarrow ۱۷ - a = ۹ \Rightarrow a = ۸$$

.39

معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک به دست آید:

$$\text{وتر مشترک} : (x^۲ + y^۲ + ۲x - ۳) - (x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow \text{وتر مشترک} : x = y$$

معادلهٔ درجه اولی که از کم کردن معادلهٔ دو دایره به دست می‌آید، حتما معادلهٔ وتر مشترک است، چون هم یک معادلهٔ درجه اول است و هم (x, y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

.40

دایرهٔ اول:

$$x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۵$$
$$O_۱(۲, -۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$$

دایرهٔ دوم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۳$$
$$O_۲(۰, ۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$$
$$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$$
$$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$$
$$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$$
$$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

.41

شعاع و مرکز دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$ عبارت‌اند از:

$$x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۹$$

$$\text{مرکز} : O'(۲,-۱) \quad , \quad \text{شعاع} : R'=۳$$

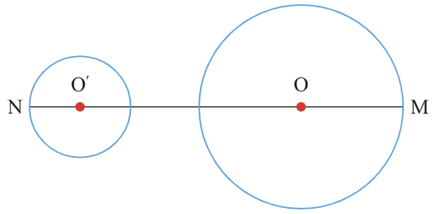
نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایرهٔ C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸,۷)$ مرکز دایرهٔ C است.

$$d=OO'=\sqrt{(۲-۸)^۲+(-۱-۷)^۲}=۱۰$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d=R+R' \Rightarrow ۱۰=R+۳ \Rightarrow R=۷$$

.42



$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-a=۰ \Rightarrow O(۱,-۱)\,,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۴a}=\sqrt{۲+a}$$

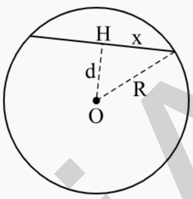
$$x^۲+y^۲+۴x-۶y+۶a=۰$$

$$\Rightarrow O'(-۲,۳)\,,\ r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۲۴a}=\sqrt{۱۳-۶a}$$

$$OO'=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

$$MN=۵+\sqrt{۲+a}+\sqrt{۱۳-۶a}=۸ \Rightarrow a=۲$$

.43



نقطه داخل دایره است. $(-۱,۲,۵) \xRightarrow{\text{جایگذاری}} ۲+۲(۲/۵)^۲+۶-۱۰(۲/۵)+۱<۰ \Rightarrow$

$$x^۲+y^۲-۳x-۵y+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow O(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$$

$$OH=\frac{۵}{۲} \quad , \quad R=۲\sqrt{۲}$$

$$R^۲=x^۲+d^۲ \Rightarrow ۸=x^۲+(\frac{۵}{۲})^۲ \Rightarrow x^۲=۸-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۷}{۴} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۷}}{۲} \quad \text{طول وتر}=۲x=\sqrt{۷}$$