فصل ۱۳:بانک سوالات کنکور "هندسه پایه"

.1

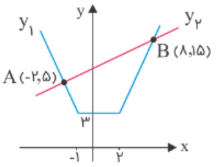
$$y_۱ = |x-۲| + |x+۱| \quad , \quad y_۲ = x+۷$$

$$y_۱ = \begin{cases} -x+۲-x-۱ & ;x \le -۱ \\ -x+۲+x+۱ & ;-۱ < x \le ۲ \\ x-۲+x+۱ & ;x > ۲ \end{cases} \Rightarrow y_۱ = \begin{cases} -۲x+۱ & ;x \le -۱ \\ ۳ & ;-۱ < x \le ۲ \\ ۲x-۱ & ;x > ۲ \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ را رسم می‌کنیم:

$$x > ۲ : ۲x-۱ = x+۷ \Rightarrow x = ۸$$

$$x < -۱ : -۲x+۱ = x+۷ \Rightarrow x = -۲$$

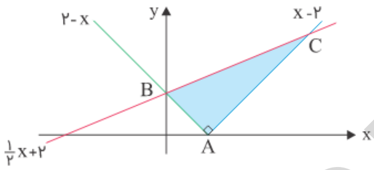


$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-(-۲))^۲ + (۱۵-۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۰۰+۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$$

.2

$$y_۱ = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = \sqrt{(x-۲)^۲} = |x-۲|$$
$$y_۲ = \frac{۱}{۲}x + ۲$$

$$|x-۲| = \begin{cases} x-۲ & ;x \ge ۲ \\ -x+۲ & ;x < ۲ \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = (۲\,,\,۰) \\ x-۲ = \frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۴ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow C = (۸\,,\,۶) \\ ۲-x = \frac{۱}{۲}x+۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow B = (۰\,,\,۲) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۲-۰)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-۲)^۲ + (۶-۰)^۲} = ۶\sqrt{۲}$$
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

.3

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادلهٔ $x - y = ۲$، قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به‌صورت $\omega(\beta+۲,\beta)$ در نظر بگیریم. فاصلهٔ مرکز دایره از هر نقطهٔ دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطهٔ $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ بر این دایره واقع‌اند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta+۲-۰)^۲ + (\beta-۱)^۲} = \sqrt{(\beta+۲-۳)^۲ + (\beta-۰)^۲}$$
$$\Rightarrow (\beta+۲)^۲ + (\beta-۱)^۲ = (\beta-۱)^۲ + \beta^۲ \Rightarrow (\beta+۲)^۲ = \beta^۲$$
$$\Rightarrow \beta^۲ + ۴\beta + ۴ = \beta^۲ \Rightarrow ۴\beta + ۴ = ۰ \Rightarrow \beta = -۱$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{(-۱+۲)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

.4

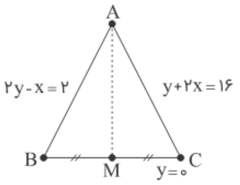
سه رأس داده‌شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{۳}{۲} \\ m_{BC} = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$S = \frac{(AC)\times(BC)}{۲} \xrightarrow{AC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳},BC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}} S = \frac{\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۳}}{۲} = ۶/۵$$

.5

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ M را به دست آوریم:

از تقاطع دو خط $y+۲x=۱۶$ و $۲y-x=۲$ مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید.

$$۲\times\begin{cases} ۲y-x=۲ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴y-۲x=۴ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases} \Rightarrow y=۴ \;,\; x=۶ \Rightarrow A(۶,۴)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$۲y-x=۲ \xrightarrow{y=۰} x=-۲ \Rightarrow B(-۲,۰)$$

$$y+۲x=۱۶ \xrightarrow{y=۰} x=۸ \Rightarrow C(۸,۰)$$

سپس مختصات نقطهٔ M را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}\right) \Rightarrow M(۳,۰)$$

اکنون فاصلهٔ دو نقطهٔ M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(۳-۶)^۲+(۰-۴)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

.6

$$\begin{cases} AB: y+۲x=۷ \\ BC: ۲y-۷x=-۱۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y+۴x=۱۴ \\ ۲y-۷x=-۱۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x=۳ \,, y=۱$$

$$\Rightarrow B(۳,۱)$$

$BH =$ فاصلهٔ B از AC $= \dfrac{|۴(۱)-۳(۳)-۱۷|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \dfrac{۲۲}{۵} = ۴/۴$

.7

گام اول

اگر M، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ $A(x_۱\,,\,y_۱)$ و $B(x_۲\,,\,y_۲)$ باشد آنگاه داریم:

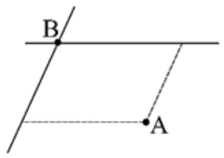
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_۱ + x_۲}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_۱ + y_۲}{۲} \end{cases}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(۷\,,\,۶)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$۲(۶) - ۳(۷) \neq ۱۱ \qquad , \qquad ۳(۶) + ۴(۷) \neq ۸$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس A در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲y - ۳x = ۱۱ \\ ۳y + ۴x = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸y - ۱۲x = ۴۴ \\ ۹y + ۱۲x = ۲۴ \end{cases} \xrightarrow{+} ۱۷y = ۶۸ \Rightarrow y = ۴$$

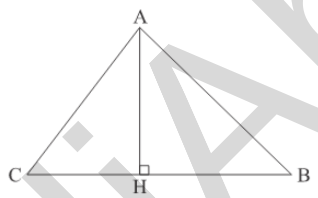
$$۲y - ۳x = ۱۱ \xrightarrow{y=۴} ۸ - ۳x = ۱۱ \Rightarrow -۳x = ۳ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow B(-۱\,,\,۴)$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مختصات وسط قطر AB برابر است با:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{۷ + (-۱)}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ \\ y_M &= \frac{۶ + ۴}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵ \end{aligned} \Rightarrow M(۳\,,\,۵)$$

.8

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصلهٔ رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادلهٔ خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(۷, ۳), C(۲, -۲) \Rightarrow m = \frac{۳ + ۲}{۷ - ۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۲ = x - ۲ \Rightarrow x - y - ۴ = ۰$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱, ۵)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۵ - ۴|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

9.

$$B\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right.\quad C\left|\begin{matrix}۷\\۱۱\end{matrix}\right. \Rightarrow M_{BC}=\frac{۱۱-۳}{۷-۳}=۲$$

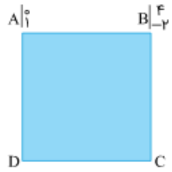
$$BC: y-۳=۲(x-۳)\Rightarrow$$

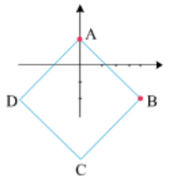
$$BC: ۲x-y-۳=۰\ ,\quad A\left|\begin{matrix}۱\\۹\end{matrix}\right.$$

$$AH=\frac{|۲(۱)-۹-۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

10.

$$m_{AB}=\frac{-۲-۱}{۴-۰}\Rightarrow m_{AB}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow m_{AD}=\frac{۴}{۳}$$





$$AD\ \text{معادله}: y-۱=\frac{۴}{۳}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۱$$

فرض کنید مختصات نقطهٔ D به صورت (x,y) باشد، پس:

$$AD=۵\Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$$
$$\Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۲۵\xrightarrow{*} x^۲+\frac{۱۶}{۹}x^۲=۲۵$$
$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۹}x^۲=۲۵\Rightarrow x=\pm ۳$$

پس مختصات طول نقطهٔ D در ربع سوم ۳- است.

توجه: به روش زیر هم می‌توان مختصات نقطهٔ D را به دست آورد:

اگر $x_D=-۳$ باشد، پس: $y_D=-۳$

$$AD=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

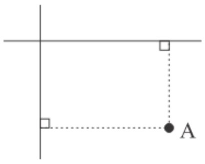
که درست است.

.11

مختصات نقطهٔ $A(۸\,,\,۵)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند.

$$۲(۵)+۸\neq ۶ \quad , \quad ۲(۸)-۵\neq ۷$$

بنابراین نقطهٔ A روی دو خط قرار ندارد و نقطهٔ برخورد دو خط، رأس روبه‌رو به رأس A خواهد بود. اکنون با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ A از هریک از خطوط، می‌توان طول و عرض مستطیل را به دست آورد.



$$۲y+x=۶ \Rightarrow ۲y+x-۶=۰$$
$$d_۱=\frac{|۲(۵)+۸-۶|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$
$$۲x-y=۷ \Rightarrow ۲x-y-۷=۰$$
$$d_۲=\frac{|۲(۸)-۵-۷|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین $d_۱=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ طول مستطیل و $d_۲=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ عرض مستطیل است و مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$S_{\text{مستطیل}}=d_۱\times d_۲=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

.12

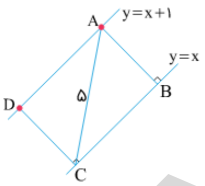
دو ضلع مقابل مستطیل موازی‌اند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$\frac{۱}{a}=a \Rightarrow a^۲=۱ \Rightarrow a=\pm ۱$$

$$a=۱ \Rightarrow \begin{cases} y=x+۱ \\ y=x \end{cases}$$

$$a=-۱ \Rightarrow \begin{cases} y=-x+۱ \\ y=-x+۲ \end{cases}$$

$a=-۱$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $A(۱,۲)$ در هیچ کدام از دو ضلع مقابل صدق نمی‌کند. فاصلهٔ دو خط موازی $y=x+۱$ و $y=x$ برابر عرض مستطیل است.



$$|AB|=\frac{|۱-۰|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ ,\ |BC|=\sqrt{۲۵-\frac{۱}{۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۲}}$$

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۷}{\sqrt{۲}}=۳/۵$$

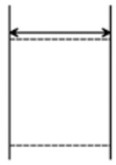
.13

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$۲x-۲y=۳ \Rightarrow m_۱=-\frac{۲}{-۲}=+۱$$
$$y=x+۱ \Rightarrow m_۲=+۱$$

دو خط داده‌شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصلهٔ این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود.

برای محاسبهٔ فاصلهٔ میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.



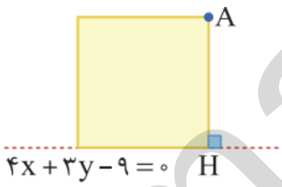
$$۲x-۲y=۳ \Rightarrow ۲x-۲y-۳=۰ \xrightarrow{\div(-۲)} -x+y+\frac{۳}{۲}=۰$$
$$y=x+۱ \Rightarrow y-x-۱=۰$$

$$d=\frac{\left|\frac{۳}{۲}-(-۱)\right|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲}}=\frac{\left|\frac{۳}{۲}+۱\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S_{\text{مربع}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۲۵}{۴\times ۲}=\frac{۲۵}{۸}$$

.14



فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ از خط $۴x+۳y-۹=۰$ برابر ضلع مربع است:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۸-۹-۹|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S=۲^۲=۴$$

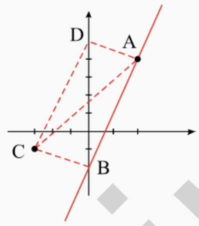
.15

فاصلهٔ نقطهٔ A را از خط راست به دست می‌آوریم. فاصلهٔ به‌دست‌آمده نصف اندازهٔ ضلع مربع است.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow d=\frac{|-۳-۲-۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۲+۳+۵}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$
$$d=\frac{a}{۲} \Rightarrow a=۲d=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}} \Rightarrow S=a^۲=(\frac{۲۰}{\sqrt{۵}})^۲=۸۰$$

.16

ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از A را می‌یابیم: $A(۲,۴)$ و $m=۳$.



$$y-۴=۳(x-۲)\Rightarrow y=۳x-۲$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ C از خط فوق که A و B روی آن قرار دارند محاسبه می‌کنیم.

این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| \text{ یا } |CB| = \frac{|y-۳x+۲|}{\sqrt{۱+۹}} \xlongequal{(-۳,-۱)} \frac{|-۱-۳(-۳)+۲|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}$$

قطر مستطیل AC است آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$|AC|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(۲-(-۳))^۲+(۴-(-۱))^۲}=\sqrt{۵۰}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow ۵۰=AB^۲+۱۰\Rightarrow |AB|=\sqrt{۴۰}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} : ۲\sqrt{۱۰}+۲\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}+۴\sqrt{۱۰}=۶\sqrt{۱۰}$$

.17

$$AB||CD: m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow \frac{y-y+۳}{x+۱+x}=\frac{۰+۳}{-۴-۰}$$

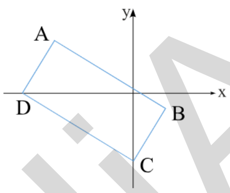
$$\Rightarrow ۲x+۱=-۴\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$$

$$AD\perp DC: m_{AD}\times m_{DC}=-۱\Rightarrow \frac{y}{x+۴}\times\left(-\frac{۳}{۴}\right)=-۱\Rightarrow y=۲$$

$$x=-\frac{۵}{۲}, y=۲\Rightarrow A\left(-\frac{۵}{۲},۲\right),\ B\left(\frac{۳}{۲},-۱\right)$$

$$AB=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵,\ BC=\sqrt{۲^۲+\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\text{مساحت مستطیل}=(AB)(BC)=(۵)\left(\frac{۵}{۲}\right)=۱۲/۵$$



.18

$$AB||CD: \frac{۴-۱}{-۱-۳}=\frac{y-y-۳}{x+۱+x}=\frac{-۳}{۲x+۱}\Rightarrow -\frac{۳}{۴}=\frac{-۳}{۲x+۱}$$

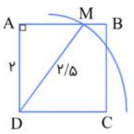
$$\Rightarrow ۲x+۱=۴\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$AB\perp BC: \frac{-۳}{۴}\times\frac{y-۱}{\frac{۳}{۲}-۳}=-۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}(y-۱)=-۱\Rightarrow y=-۱$$

$$C\left(\frac{۳}{۲},-۱\right)\Rightarrow |AB|=۵,\ |BC|=\frac{۵}{۲}\Rightarrow \text{محیط}=۲(|AB|+|BC|)=۱۵$$

.19

مربع $ABCD$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۲/۵ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $D\overset{\Delta}{A}M$، فاصلهٔ نقطهٔ M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

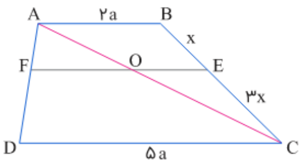
$$AM^۲ + ۲^۲ = (۲/۵)^۲ \Rightarrow AM^۲ + ۴ = ۶/۲۵ \Rightarrow AM^۲ = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵ \quad , \quad MB = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ است.

.20

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF = \frac{۵}{۴}a$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow \frac{۳x}{۴x} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE = \frac{۳}{۲}a$$

$$EF = OF + OE = \frac{۵}{۴}a + \frac{۳}{۲}a = \frac{۱۱}{۴}a$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{\frac{۱۱}{۴}a}{۵a} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

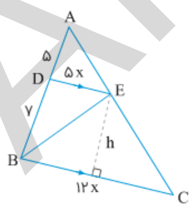
.21

طبق قضیهٔ تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\left.\begin{array}{l} BE \| AC \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ AB \| DC \Rightarrow \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

.22



$$\frac{S_{B\overset{\Delta}{C}E}}{S_{B\overset{\Delta}{D}E}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times \cancel{h} \times BC}{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times \cancel{h} \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۲x}{۵x} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

.23

قاعدهٔ هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

.24

مثلث ACH , AH’B قائم الزاویه و به دلیل وجود زاویه 45 درجه متساوی الساقین هستند، پس:

$$AH' = BH' = x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x^2 = (AB)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 4\sqrt{2}$$

$$BH = AB - x = 8 - 4\sqrt{2}$$

ABH’ , OHB متشابه اند پس مثلث OHB نیز متساوی الساقین است:

$$OH = 8 - 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad S_{OHB} = \frac{1}{2} \times \left(8 - 4\sqrt{2}\right)^2 = 16\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \frac{16}{3+2\sqrt{2}}$$

تجربی 1400

راه‌حل اول:

$$\overset{\Delta}{AHC} : \cos\hat{C} = \frac{HC}{۶} \Rightarrow HC = ۶\cos ۷۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OHC} : \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = ۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ$$

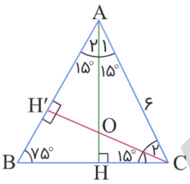
$$S_{OHC} = \frac{۱}{۲} \times (۶\cos ۷۵^\circ)(۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ) = ۱۸\cos^۲ ۷۵^\circ (۲ - \sqrt{۳})$$

$$= ۱۸ \times \frac{۱ + \cos ۱۵۰^\circ}{۲}(۲ - \sqrt{۳}) = ۹(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})(۲ - \sqrt{۳})$$

$$= \frac{۹}{۲}(۲ - \sqrt{۳})^۲ = \frac{۹}{۲}(۷ - ۴\sqrt{۳}) = \frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$$

راه‌حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:



$$\hat{C} = \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BH'C} : \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۵^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OHC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OHC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^۲ = \tan^۲ ۱۵^\circ$$

$$= \left(۲ - \sqrt{۳}\right)^۲ = ۷ - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) S_{\overset{\Delta}{AHC}} \ (*)$$

$$S_{\overset{\Delta}{AHC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\left(\underbrace{AB}_{۶}\right)\left(\underbrace{AC}_{۶}\right)\left(\underbrace{\sin\hat{A}}_{\frac{۱}{۲}}\right)\right) = \frac{۹}{۲}$$

$$(*) \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) \times \frac{۹}{۲} = \frac{۹\left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right)}{۲}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$۱)\ \tan ۱۵^\circ = \tan(۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۱ + \tan ۶۰^\circ \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$۲)\ \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱)$$

$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\sin ۲x = ۲ \sin x . \cos x)$$

$$\Rightarrow \tan ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

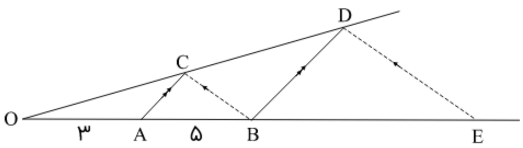
.25

$$\left.\begin{array}{l} B\overset{\Delta}{D}N : AM || DN \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{MN}{BM} \\ A\overset{\Delta}{C}M : EN || AM \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{MN}{CM} \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=CM} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}$$

.26

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیهٔ تالس داریم:



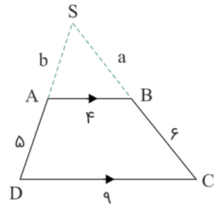
$$\begin{cases} AC || BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ \\ BC || DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE} = \dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

تجربی داخل 94

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB=۴$، $CD=۹$، $AD=۵$ و $BC=۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$AB||CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD}=\frac{SB}{SC}=\frac{AB}{CD}$$

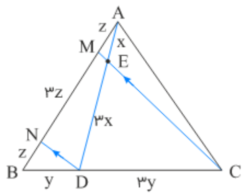
$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵}=\frac{a}{a+۶}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+۵}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b=۴b+۲۰ \Rightarrow b=۴ \\ \frac{a}{a+۶}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a=۴a+۲۴ \Rightarrow a=۴/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow SAB \text{ محیط مثلث } = ۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$$

.27

فرض کنیم $AE=x$، $ED=۳x$، $BD=y$ و $DC=۳y$. داریم:



$$\overset{\Delta}{AND}: ME||DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN}=\frac{AE}{ED}=\frac{۱}{۳}$$

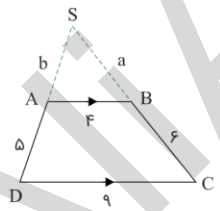
$$\Rightarrow AM=z \text{ و } MN=۳z$$

$$\overset{\Delta}{BCM}: DN||CM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM}=\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BN}{۳z}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow BN=z$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{z+۳z+z}{z}=\frac{۵z}{z}=۵$$

.28

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB=۴$، $CD=۹$، $AD=۵$ و $BC=۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$AB||CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD}=\frac{SB}{SC}=\frac{AB}{CD}$$

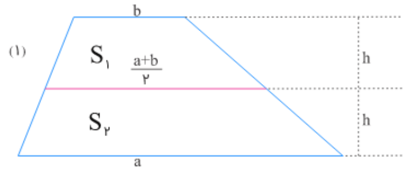
$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵}=\frac{a}{a+۶}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+۵}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b=۴b+۲۰ \Rightarrow b=۴ \\ \frac{a}{a+۶}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a=۴a+۲۴ \Rightarrow a=۴/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow SAB \text{ محیط مثلث } = ۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$$

.29

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.

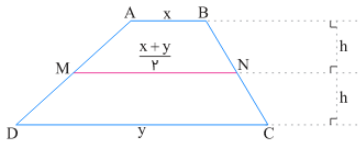


$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(a+\frac{a+b}{۲}) = ۲ \times \frac{۱}{۲}h(b+\frac{a+b}{۲})$$
$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

.30

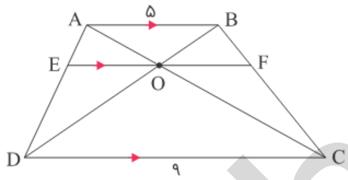
می‌دانیم در ذوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.

باتوجه‌به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(x+\frac{x+y}{۲})(h)}{\frac{۱}{۲}(\frac{x+y}{۲}+y)(h)} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۳x+y}{۲}}{\frac{x+۳y}{۲}} = \frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{۳x+y}{x+۳y} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۵x+۵y = ۳x+۹y \Rightarrow ۱۲x = ۴y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۱}{۳}$$

.31



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC} : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۹} = \frac{AE}{AD} \\ \overset{\Delta}{DAB} : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۵} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

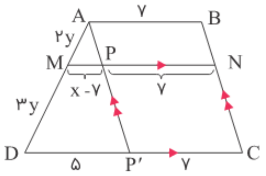
$$\Rightarrow \frac{EO}{۹} + \frac{EO}{۵} = \frac{\overbrace{AE+DE}^{AD}}{AD} = ۱ \xrightarrow{\times ۴۵} ۵EO + ۹EO = ۴۵$$
$$\Rightarrow ۱۴EO = ۴۵ \Rightarrow EO = \frac{۴۵}{۱۴}$$

به روش مشابه $\Rightarrow OF = \frac{۴۵}{۱۴} \Rightarrow EF = \frac{۴۵}{۱۴} + \frac{۴۵}{۱۴} = \frac{۴۵}{۷}$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \frac{۲}{\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{DC}}$. (طول EF واسطهٔ توافقی طول قاعده‌ها است)

.32

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{DP'}$$
$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y+۳y}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow x=۹=MN$$

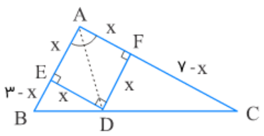
.33

نقطهٔ D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE=DF$

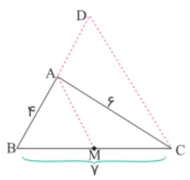
$\hat{A}=۹۰^\circ$ و $DE=DF$، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE||FD$

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{FD}{AB}=\frac{FC}{AC}\Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{۷-x}{۷}\Rightarrow ۷x=۲۱-۳x\Rightarrow ۱۰x=۲۱\Rightarrow x=۲/۱$$
$$\Rightarrow AD=\sqrt{۲}x=۲/۱\sqrt{۲}$$



.34

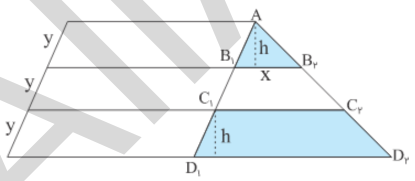


در مثلث BDC می‌دانیم $AM||CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow \frac{۴}{BD}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow BD=۸$$

.35

فرض کنید $B_۱B_۲=x$ باشد. در این صورت داریم:

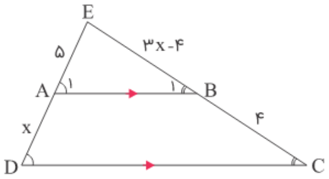


$$\overset{\Delta}{AC_۱C_۲}:\frac{AB_۱}{AC_۱}=\frac{x}{C_۱C_۲}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{C_۱C_۲}\Rightarrow C_۱C_۲=۲x$$
$$\overset{\Delta}{AD_۱D_۲}:\frac{AB_۱}{AD_۱}=\frac{x}{D_۱D_۲}\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{x}{D_۱D_۲}\Rightarrow D_۱D_۲=۳x$$

$$\frac{S_{AB_۱B_۲}}{S_{C_۱C_۲D_۲D_۱}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times x\times h}{\frac{۱}{۲}(۲x+۳x)h}=\frac{۱}{۵}$$

ریاضی خارج 99

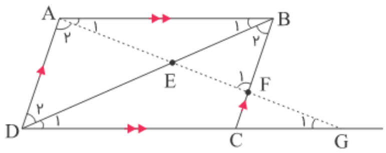
طبق فرض، داریم:



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۳x - ۴}{۴}$$
$$\Rightarrow ۳x^{۲} - ۴x - ۲۰ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۱۰}{۳} \quad (*)$$
$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D} \ , \ \hat{B}_۱ = \hat{C} \Rightarrow E\overset{\Delta}{A}B \sim E\overset{\Delta}{D}C$$
$$\Rightarrow \frac{S_{E\overset{\Delta}{A}B}}{S_{E\overset{\Delta}{D}C}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^{۲} \underset{(*)}{\underset{\downarrow}{=}} \left(\frac{۵}{۵ + \frac{۱۰}{۳}}\right)^{۲} = \left(\frac{۱۵}{۲۵}\right)^{۲} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵}$$
$$\Rightarrow S_{E\overset{\Delta}{A}B} = ۹S \ , \ S_{E\overset{\Delta}{D}C} = ۲۵S \Rightarrow S_{ABCD} = ۲۵S - ۹S = ۱۶S$$
$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{E\overset{\Delta}{A}B}} = \frac{۱۶S}{۹S} = \frac{۱۶}{۹}$$

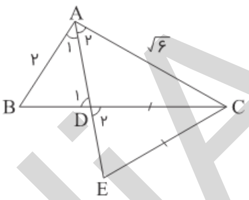
.36

چون $DG \parallel AB$ و $AD \parallel BC$ است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{G}_۱ \ , \ \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow E\overset{\Delta}{A}B \sim E\overset{\Delta}{G}D \Rightarrow \dfrac{EA}{EG} = \dfrac{EB}{ED} \\ \hat{B}_۲ = \hat{D}_۲ \ , \ \hat{F}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow E\overset{\Delta}{B}F \sim E\overset{\Delta}{A}D \Rightarrow \dfrac{EF}{EA} = \dfrac{EB}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$$
$$\Rightarrow EF.EG = EA^{۲}$$

.37

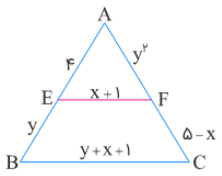


طبق شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ & \text{نیمساز } AD \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_۱ = \hat{E}$$
$$\xrightarrow{\text{زز}} A\overset{\Delta}{B}D \sim A\overset{\Delta}{E}C \quad \left(k = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{B}D}}{S_{A\overset{\Delta}{C}E}} = k^{۲} = \left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^{۲} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

.38

چون $BC \parallel EF$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

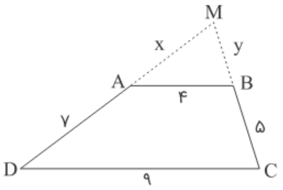


$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{x+۱}{y+x+۱}=\frac{۴}{y+۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x+۱}{y}=\frac{۴}{y}\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳\quad(*)$$

$$\text{تالس}:\ \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(*)}\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}\Rightarrow y^۳=۸\Rightarrow y=۲\Rightarrow y-۲x=۲-۶=-۴$$

.39

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{AMB}\sim\overset{\Delta}{MDC}\Rightarrow\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+۷}=\frac{y}{y+۵}=\frac{۴}{۹}$$

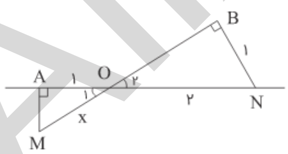
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{x+۷}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹x=۴x+۲۸\Rightarrow ۵x=۲۸\Rightarrow x=\frac{۲۸}{۵}\\ \frac{y}{y+۵}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۹y=۴y+۲۰\Rightarrow ۵y=۲۰\Rightarrow y=\frac{۲۰}{۵}=۴\end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط}\ \overset{\Delta}{AMB}=x+y+۴=\frac{۲۸}{۵}+۴+۴=۸+\frac{۲۸}{۵}=\frac{۴۰+۲۸}{۵}=\frac{۶۸}{۵}=۱۳/۶$$

.40

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



$$OB=\sqrt{ON^۲-BN^۲}=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$$

دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند $(\hat{O}_۱=\hat{O}_۲,\hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ)$. داریم:

$$\frac{OM}{ON}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

.41

$$\Delta OCD \sim \Delta OEF \Rightarrow \frac{۳}{OC} = \frac{y}{۴} = \frac{۱}{y} \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \\ OC = ۶ \end{cases}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{۲x} = \frac{۴}{x+۴} \xrightarrow{y=۲} \frac{۲}{۲x} = \frac{۴}{x+۴} \Rightarrow ۴x = x + ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

$$\Delta OAB : \frac{y}{۲x} = \frac{OC}{OC+AC} \Rightarrow \frac{۲}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۶}{۶+AC} \Rightarrow ۶ + AC = ۸ \Rightarrow AC = ۲$$

.42

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN || BP \Rightarrow MN || BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$
$$NP || MB \Rightarrow NP || AB \Rightarrow \overset{\Delta}{NPC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA+MB} = \frac{۱}{\frac{MA+MB}{MA}} = \frac{۱}{۱+\frac{MA}{MB}} = \frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMN}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

چون $MN || BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{NPC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN+NC} = \frac{۱}{\frac{AN+NC}{NC}} = \frac{۱}{\frac{NC}{AN}+۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱} = \frac{۱}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{NPC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{NPC}} = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را برحسب مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{AMN}} + S_{\overset{\Delta}{NPC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\Delta}{ABC}} + \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{۱۲}{۲۵} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۴۸}{۱۰۰} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است.

.43

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{۴}{۷} \neq \frac{۵}{۹}$ و $\frac{۵}{۷} \neq \frac{۴}{۹}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلعِ به طول a از مثلث اول یا با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلعِ به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۹} = \frac{۴}{b} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}$$

حالت دوم: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a = \frac{۲۸}{۹} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow a = \frac{۳۵}{۹}$$

از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{۴۵}{۷}$ است.

.44

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $MN||PB$ است. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$$MN||BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO||AM$ است پس دو مثلث $A\hat{M}C$ و $N\hat{O}C$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{N\hat{O}C}}{S_{A\hat{M}C}} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{N\hat{O}C} = \frac{۴۹}{۱۰۰} S_{A\hat{M}C} \quad (I)$$

مساحت دو مثلث $A\hat{M}C$ و $A\hat{B}C$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{A\hat{B}C} = \frac{۱}{۲} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S_{A\hat{M}C} = \frac{۱}{۲} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{A\hat{M}C}}{S_{A\hat{B}C}} = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow S_{A\hat{M}C} = \frac{۳}{۱۰} S_{A\hat{B}C} \quad (II)$$

با استفاده از دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$S_{N\hat{O}C} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰} S_{A\hat{B}C} = \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰} S_{A\hat{B}C} \quad (III)$$

از طرفی چون $MN||BP$ است پس دو مثلث $A\hat{M}N$ و $A\hat{B}C$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{A\hat{M}N}}{S_{A\hat{B}C}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} = \frac{۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{A\hat{M}N} = \frac{۹}{۱۰۰} S_{A\hat{B}C} \quad (IV)$$

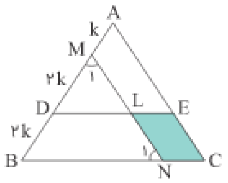
اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{O\hat{M}N}}{S_{A\hat{M}N}} = \frac{S_{A\hat{M}C} - S_{A\hat{M}N} - S_{N\hat{O}C}}{S_{A\hat{M}N}} = \frac{\left(\frac{۳}{۱۰} - \frac{۹}{۱۰۰} - \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}\right) S_{A\hat{B}C}}{\frac{۹}{۱۰۰} S_{A\hat{B}C}} = \frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}} = \frac{۶۳}{۹۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $O\hat{M}N$، ۷۰ درصد مساحت مثلث $A\hat{M}N$ است.

.45

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$MN || AC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{A} = ۶۰^\circ\,,\ \hat{N}_۱ = \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \text{متساوی الاضلاع است } \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow BN = ۴k$$

هردو مثلث $\overset{\triangle}{MBN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع هستند درنتیجه باهم متشابه‌اند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\overset{\triangle}{MBN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \quad \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۴k}{۵k}\right)^۲ = \left(\frac{۴}{۵}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} \quad \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MBN}} = \frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

همچنین

$$DL || BN \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = ۶۰^\circ\,,\ \hat{L} = \hat{N}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \text{متساوی الاضلاع است } \overset{\triangle}{MDL} \Rightarrow ML = ۲k$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\overset{\triangle}{ADE}$ نیز متساوی‌الاضلاع و $AE = ۳k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{MBN}$ و دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{MBN} \quad \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{MBN}}} = \left(\frac{۲k}{۴k}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MDL}} = \frac{۱}{۴} S_{\overset{\triangle}{MBN}} = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{ADE} \quad \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}} = \left(\frac{۲k}{۳k}\right)^۲ = \frac{۴}{۹} \quad \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}} = \frac{۹}{۴} S_{\overset{\triangle}{MDL}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

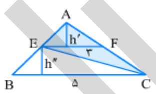
با استفاده از نسبت‌های بالا، نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{AMLE} = S_{\overset{\triangle}{ADE}} - S_{\overset{\triangle}{MDL}} = \frac{۹}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} - \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۵}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{LECN} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - (S_{\overset{\triangle}{BMN}} + S_{AMLE}) = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - \left(\frac{۱۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} + \frac{۵}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}}\right) = \frac{۴}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \%۱۶ S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

.46



$$\frac{EF}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

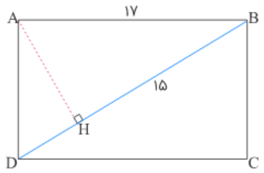
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEC}}}{S_{BCFE}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times h''}{\frac{۱}{۲} \times (۳+۵) \times h''} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{BCFE}} = ۱ - \frac{۵}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

$$\text{نسبت تشابه}: \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{AEF}}}$$

$$= \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{\frac{۲۵}{۹} S_{\overset{\triangle}{AEF}} - S_{\overset{\triangle}{AEF}}} = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۹} - ۱} = \frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEC}}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{EFC}}}{S_{BCFE}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{AEF}}}{S_{BCFE}} = \frac{۳}{۸} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

.47



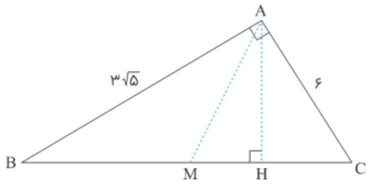
$AB^۲ = BH \times BD$

$۱۷^۲ = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^۲}{۱۵}$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$\frac{۱۷^۲}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷^۲ - ۱۵ \times ۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$

.48



$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۶^۲ + (۳\sqrt{۵})^۲} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$

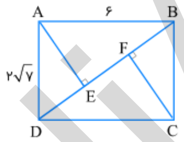
$\overset{\Delta}{ABC} : AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$

$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵$

$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times HM}{۲}} = \frac{\frac{AH \times ۹}{۲}}{\frac{AH \times \frac{۱}{۲}}{۲}} = ۱۸$

.49

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$\overset{\Delta}{ABD} : BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۳۶ + ۲۸ = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$

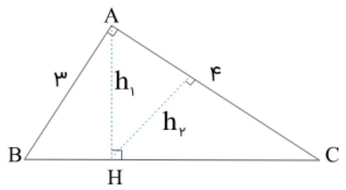
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$\overset{\Delta}{ABD} : AD^۲ = DE.BD \Rightarrow ۲۸ = DE \times ۸ \Rightarrow DE = \frac{۲۸}{۸} = ۳/۵$

به طور مشابه $BF = ۳/۵$ است و داریم:

$EF = BD - (DE + BF) = ۸ - ۷ = ۱$

.50



$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \ \text{مشترک} \\ A\hat{H}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

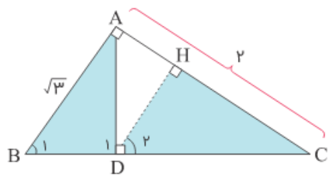
راه‌حل دوم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \begin{cases} h_۱ \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_۱ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_۱ = \frac{۱۲}{۵} \\ AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \frac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : h_۲ \times AC = h_۱ \times HC \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

.51

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:



$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۳ + ۴ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel DH, \ \text{مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_۲ = \widehat{B}_۱ \\ \hat{D}_۱ = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{HCD}$$

طبق روابط طولی در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^۲ = BC \times CD$$

$$\Rightarrow ۴ = \sqrt{۷} \times CD \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

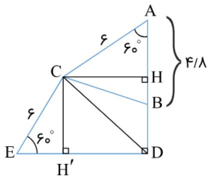
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{HCD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = K^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

.52

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin ۶۰^\circ = ۷/۲ \times \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times ۴/۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۷/۲ \times \sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۶ \Rightarrow EC = ۶$$

در مثلث AHC داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{CH}{۶} \Rightarrow CH = ۳\sqrt{۳}$$

دو مثلث CEH' و ACH هم‌نهشت‌اند، پس درنتیجه $CH' = ۳\sqrt{۳}$. بنابراین چهارضلعی $HCH'D$ مربع است و داریم:

$$DC = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

.53

دو مثلث AED و ABC به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا: $\hat{A} = \hat{A}\,,\, \hat{C} = A\hat{E}D$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۵} = \frac{۲}{x+۱} \Rightarrow x^۲ + x = ۳۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۳۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۶)(x-۵) = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۵$$

.54

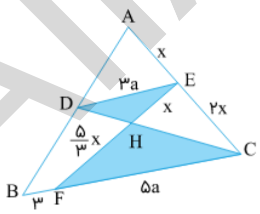
$$۳y = ۵x \Rightarrow y = \frac{۵}{۳}x$$

$$EC = ۱/۲y = \frac{۱۲}{۱۰} \times \frac{۵}{۳}x = ۲x$$

$$FH = y = \frac{۵}{۳}x$$

دو مثلث DHE و HFC با هم متشابه‌اند، پس:

$$\frac{FH}{HE} = \frac{FC}{DE} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{DE}{FC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \begin{cases} DE = ۳a \\ FC = ۵a \end{cases}$$

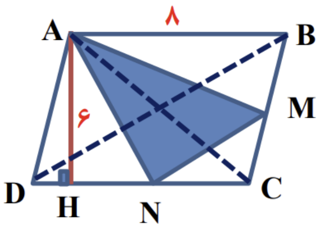


در مثلث ABC قضیهٔ تالس را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۳a}{۳+۵a} = \frac{x}{۳x} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹a = ۳ + ۵a \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

$$BC = ۳ + ۵a = ۳ + ۵ \times \frac{۳}{۴} = ۳ + \frac{۱۵}{۴} = ۳ + ۳/۷۵ = ۶/۷۵$$

.55



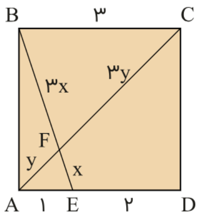
$$S_{ABCD} = DC \times AH = ۸ \times ۶ = ۴۸$$

$$S_{ABM} = S_{ACM} = S_{ACN} = S_{ADN} \Rightarrow S_{AMCN} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۴۸ = ۲۴$$

$$\frac{MC}{BC} = \frac{۱}{۲},\ MN \,||\, BD \xrightarrow{\text{Tales}} S_{MNC} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ S_{BDC} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲} S_{ABCD}\right) = ۶$$

$$S_{AMN} = ۲۴ - ۶ \Rightarrow \boxed{S_{AMN} = ۱۸}$$

.56



$$\frac{AE}{AD} = \frac{۱}{۳} = \frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FB}$$

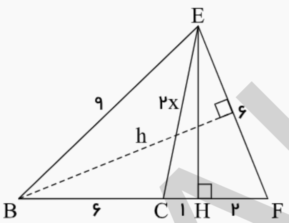
$$\frac{EF}{AF} = \frac{x}{y} = \frac{BE}{AC} = \frac{۴x}{۴y}$$

$$BE^۲ = ۹ + ۱ = ۱۰ \Rightarrow BE = \sqrt{۱۰}$$

$$AC^۲ = ۹ + ۹ = ۱۸ \Rightarrow AC = ۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

.57



$$AB \parallel CD \to \frac{CF}{BF} = \frac{CJ}{BE} = \frac{JF}{FE}$$

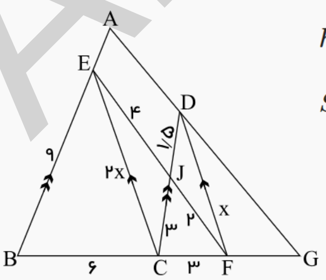
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{۹} = \frac{CJ}{۹} \to CJ = ۳ \\ \frac{۳}{۹} = \frac{JF}{۴ + FJ} \to FJ = ۲ \end{cases}$$

$$JDF \sim EJC \Rightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{CJ}{JD} \Rightarrow \frac{۴}{۲} = \frac{۳}{JD} \Rightarrow JD = ۱٫۵$$

و چون نسبت تشابه دو مثلث EJC و JDF برابر ۲ است، داریم:

$$DF = x \ ,\ EC = ۲x$$

حال مثلث BEF را در نظر می‌گیریم:



$$h = \sqrt{۹^۲ - ۳^۲} = \sqrt{۸۱ - ۹} = ۶\sqrt{۲}$$

$$S_{BEF} = \frac{۶ \times h}{۲} = \frac{۶ \times ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۱۸\sqrt{۲}$$

از طرفی:

$$S_{BEF} = \frac{BF \times EH}{۲} \Rightarrow ۱۸\sqrt{۲} = \frac{۹ \times EH}{۲} \to EH = ۴\sqrt{۲}$$

$$BH^۲ = BE^۲ - EH^۲ \Rightarrow BH = \sqrt{۹^۲ - (۴\sqrt{۲})^۲} = ۷ \to CH = ۱$$

$$EC^۲ = EH^۲ + CH^۲ \Rightarrow EC = \sqrt{(۴\sqrt{۲})^۲ + ۱} = \sqrt{۳۳}$$

$$DF = \frac{۱}{۲}EC = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$