فصل ۱۲: بانک سوالات کنکور " احتمال"

.1

فضای نمونه‌ای این آزمایش $۶^۲ = ۳۶$ حالت دارد.

فضای مطلوب به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{Bmatrix} (۱,۱)(۱,۲),(۲,۱),(۱,۴),(۴,۱),(۱,۶),(۶,۱) \\ (۲,۳)(۳,۲)(۲,۵)(۵,۲)(۳,۴)(۴,۳) \\ (۵,۶)(۶,۵) \end{Bmatrix}$$

این مجموعه ۱۵ عضوی است:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

.2

گام اول

الف) تعداد کل حالت‌ها $(n(S))$ در پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است.

ب) مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس عددی بین ۲ و ۱۲ خواهد بود. بنابراین پیشامد مورد نظر شامل حالت‌هایی می‌شود که جمع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ است.

ج) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ شود را مشخص می‌کنیم:

مجموع دو تاس برابر۴ : $(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)$

مجموع دو تاس برابر۸ : $(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)$

مجموع دو تاس برابر۱۲ : $(۶,۶)$

بنابراین $n(A) = ۹$ و $n(S) = ۳۶$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

.3

پیشامد A را رو شدن دو عدد متوالی تعریف می‌کنیم، تمام حالت‌های ممکن به‌صورت زیر است:

$$A = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱۰ و تعداد کل حالت‌ها برابر ۳۶ است؛ بنابراین احتمال پیشامد A برابر می‌شود با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

.4

برای اینکه مجموع اعداد روشده مضرب ۳ باشد، باید مجموع برابر ۳، ۶، ۹ یا ۱۲ باشد.

مجموع	حالت‌ها
۳	(۱, ۲), (۲, ۱)
۶	(۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۵, ۱)
۹	(۳, ۶), (۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳)
۱۲	(۶, ۶)

پس در کل ۱۲ حالت داریم که احتمال آن برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۶^۲} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$$

.5

مجموع باید ۴، ۸ یا ۱۲ باشد:

مجموع ۴ : (۱, ۳), (۲, ۲), (۳, ۱)

مجموع ۸ : (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴), (۵, ۳), (۶, ۲)

مجموع ۱۲ : (۶, ۶)

$$P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

.6

فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس: $n(S) = ۳۶$

حالات مطلوب:

$$A = \{(۳\,,\,۴)\,,\,(۴\,,\,۳), (۱\,,\,۶), (۶\,,\,۱)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

.7

گام اول

برای اینکه رنگ مهره‌های خارج‌شده متفاوت باشد باید از هر رنگ یک مهره انتخاب کنیم.

گام دوم

$$n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۳! \times ۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۶} = ۲۲۰$$
$$n(A) = \binom{۵}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۰}{۲۲۰} = \frac{۶}{۲۲} = \frac{۳}{۱۱}$$

.8

فضای نمونه‌ای انتخاب ۳ مهره از ۱۰ مهره است:

$$n(S)=\binom{10}{3}=\frac{10\times 9\times 8}{6}=120$$

تعداد هر کدام از حالت‌ها: ۲ تا از سفیدها و یکی از بقیه، ۲ تا از سیاه‌ها و یکی از بقیه، ۲ تا از قرمزها و یکی از بقیه را به دست می‌آوریم، سپس جمع می‌کنیم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو سفید}}\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یکی از بقیهٔ رنگ‌ها}}+\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{دو سیاه}}\underbrace{\binom{7}{1}}_{\text{یکی از بقیهٔ رنگ‌ها}}+\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{دو قرمز}}\underbrace{\binom{8}{1}}_{\text{یکی از بقیهٔ رنگ‌ها}}=50+21+8=79$$

پس $P(A)=\frac{79}{120}$ است.

.9

گام اول

از میان ۳ مهرهٔ انتخاب‌شده، فقط یکی سفید است؛ یعنی یک مهره از بین ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهره از بین مهره‌های سیاه و قرمز انتخاب شود (پیشامد A).

گام دوم

انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره: $\binom{9}{3}$

انتخاب یک مهره از بین ۴ مهرهٔ سفید: $\binom{4}{1}$

انتخاب دو مهره از مهره‌های سیاه و قرمز: $\binom{5}{2}$

$$n(A)=\binom{4}{1}\times\binom{5}{2}=4\times 10=40$$

$$n(S)=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times 6!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6\times 6!}=84$$

بنابراین احتمال اینکه فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$$

.10

گام اول

به طور کلی $10=5+2+3$ مهره در جعبه وجود دارد که دو تا از آن بیرون می‌آوریم. همرنگ بودن دو مهره یعنی یا هر دو سفید، یا هر دو سیاه و یا هر دو قرمز باشند. احتمال همرنگ نبودن را خواسته‌اند پس می‌توان از احتمال پیشامد متمم استفاده کرد.

گام دوم

پیشامد متمم به صورت احتمال همرنگ بودن دو مهره خواهد بود، یعنی:

$$P(\text{همرنگ بودن})=P(\text{هر دو سفید})+P(\text{هردو سیاه})+P(\text{هردو قرمز})$$

$$=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{3}{45}+\frac{1}{45}+\frac{10}{45}=\frac{14}{45}$$

$$P(\text{غیرهمرنگ بودن})=1-P(\text{دو مهره همرنگ})=1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$$

.11

$$P_{\text{کل}} = P(\text{۱مهره قرمز، ۲ مهره سفید، ۱ مهره سیاه}) + P(\text{۱مهره قرمز، ۳ مهره سفید})$$

$$= \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۴}{۴}} + \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۴}{۴}} = \frac{۲ \times \frac{۷ \times ۶}{۲} \times ۵ + ۲ \times \frac{۷!}{۳! \times ۴!}}{\frac{۱۴!}{۴! \times ۱۰!}}$$

$$= \frac{۷ \times ۶ \times ۵ + ۲ \times \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳ \times ۲}}{\frac{۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۴ \times ۳ \times ۲}}$$

$$P_{\text{کل}} = \frac{۲۱۰ + ۷۰}{۷ \times ۱۳ \times ۱۱} = \frac{۴۰}{۱۳ \times ۱۱} = \frac{۴۰}{۱۴۳}$$

.12

الف) به واژهٔ حداقل در صورت تست توجه کنید. این واژه نقش تعیین‌کننده‌ای در حل تست دارد. وقتی قرار است حداقل یک مهره از ۳ مهرهٔ انتخاب شده، آبی باشد یعنی تعداد مهره‌های آبی می‌تواند یکی، دو تا یا سه تا باشد.

ب) اگر پیشامد A را انتخاب حداقل یک مهرهٔ آبی تعریف کنیم آن‌گاه پیشامد A' انتخاب نشدن مهرهٔ آبی یا انتخاب هر سه مهره از میان مهره‌های قرمز و سفید را بیان می‌کند. این تست را می‌توان با احتمال پیشامد متمم نیز حل کرد.

$$P(A) = ۱ - P(A')$$

روش اول:

فضای نمونه ای شامل انتخاب ۳ مهره از میان ۹ مهرهٔ موجود است. بنابراین

$$P(\text{حداقل یک مهرهٔ آبی}) = P(\text{یک مهرهٔ آبی}) + P(\text{دو مهرهٔ آبی}) + P(\text{سه مهرهٔ آبی})$$

$$= \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۳}} + \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۴۰ + ۳۰ + ۴}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

روش دوم:

با استفاده از احتمال پیشامد متمم داریم:

$$P(A') = P(\text{مهرهٔ آبی نداشته باشیم}) = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۱۰}{۸۴}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۷۴}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

.13

$$P(A) = \frac{\binom{\text{سفید}}{۲} + \binom{\text{سیاه}}{۲}}{\binom{\text{کل مهره‌ها}}{۲}} = \frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۲۰}{۴۵} = \frac{۴}{۹}$$

.14

تعداد حالات بیرون آوردن دو کارت به‌تصادف از میان ۹ کارت برابر است با:

$$n(S) = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

مجموعهٔ حالاتی که مجموع دو کارت، برابر ۱۱ باشند، عبارت است از:

$$A = \{(۲,۹), (۳,۸), (۴,۷), (۵,۶)\}$$

پس $n(A) = ۴$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

.15

تعداد کل اعداد سه رقمی با ارقام روی کارت‌ها برابر است با:

$n(S)=۵\times۴\times۳=۶۰$

حال برای ساختن عدد سه رقمی مضرب ۶، باید عدد زوج و مضرب ۳ بسازیم.

چنین عددی با ارقام $\{۱,۲,۳\},\{۲,۳,۴\},\{۳,۴,۵\}$ قابل ساختن است. توجه کنید رقم یکان باید زوج باشد:

❶ $\{۱,۲,۳\}:۲\times۱\times۱=۲$
❷ $\{۲,۳,۴\}:۲\times۱\times۲=۴\Rightarrow n(A)=۲+۴+۲=۸$
❸ $\{۳,۴,۵\}:۲\times۱\times۱=۲$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۶۰}=\frac{۲}{۱۵}$$

تذکر دقت کنید با ارقام $\{۱,۳,۵\}$ می‌توانیم عدد مضرب ۳ بسازیم. اما چون در بین آن‌ها رقم زوج وجود ندارد، نمی‌توانیم عدد مضرب ۶ بسازیم.

.16

۱۶ با ارقام **۱** و **۲** و **۳** و **۴** و **۵** زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم که در آن رقم تکراری به‌کار نرفته باشد، یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عضو انتخاب‌شده بر **۴** بخش‌پذیر باشد کدام است؟ (با کمی تغییر)

۱) $\frac{۱۳}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

اعداد حاصل می‌توانند یک‌رقمی تا پنج‌رقمی باشند البته بدون تکرار.

$$\left.\begin{array}{l} \text{اعداد یک‌رقمی} : ۵ \text{ حالت} \\ \text{دورقمی} : \binom{۵}{۲}\times ۲! = ۲۰ \\ \text{سه‌رقمی} : \binom{۵}{۳}\times ۳! = ۶۰ \\ \text{چهاررقمی} : \binom{۵}{۴}\times ۴! = ۱۲۰ \\ \text{پنج‌رقمی} : \binom{۵}{۵}\times ۵! = ۱۲۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} n(S) = ۳۲۵ \text{ حالت}$$

می‌دانیم عددی به **۴** بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن مضرب **۴** باشند. با ارقام داده‌شده و بدون تکرار ارقام اعدادی قابل‌قبول هستند که دو رقم سمت راست آنها به **۵۲** و **۳۲** و **۲۴** و **۱۲** ختم می‌شود. در اعداد تک‌رقمی نیز فقط عدد چهار قابل‌قبول است.

به‌ازای هرکدام از **۲** رقم قابل‌قبول صدگان **۳** حالت خواهد داشت.

$$\left.\begin{array}{l} \text{تک‌رقمی} \to ۱ \text{ حالت} \\ \text{دورقمی} \to ۴ \text{ حالت } (۱۲, ۳۴, ۳۲, ۵۲) \\ \text{سه‌رقمی} \to \underline{۳}\times \overset{۴ \text{ حالت}}{\boxed{-\times-}} = ۱۲ \\ \text{چهاررقمی} \to \underline{۳}\times\underline{۲}\times \overset{۴}{\boxed{-\times-}} = ۲۴ \\ \text{پنج‌رقمی} \to \underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times \overset{۴}{\boxed{-\times-}} = ۲۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} n(A) = ۶۵ \text{ حالت} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶۵}{۳۲۵} = \frac{۱}{۵}$$

.17

بدون توجه به اعداد اول و دوم، اینکه عدد سوم ۱۰ باشد برابر $\frac{۱}{n}$ است که طبق فرض:

$$\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow n=۱۵$$

در میان اعداد ۱ تا ۱۵، پنج عدد مضرب ۳ و ده عدد غیر مضرب ۳ داریم. لذا در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان این اعداد، احتمال اینکه فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P=\overbrace{\frac{۱۰}{۱۵}\times\frac{۹}{۱۴}}^{\text{غیرمضرب ۳}}\times\overbrace{\frac{۵}{۱۳}}^{\text{مضرب ۳}}=\frac{۱۵}{۹۱}$$

.18

گام اول

الف) برای اینکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند باید هر ۳ سیاه یا هر ۳ سفید باشند.

ب) فضای حالت به صورت انتخاب ۳ مهره از میان $۹=۴+۵$ مهرهٔ موجود است.

ج) پیشامد مورد نظر به صورت انتخاب ۳ مهره از میان ۴ مهرهٔ سفید یا انتخاب ۳ مهره از میان ۵ مهرهٔ سیاه تعریف می‌شود.

د) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!\times ۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۶\times ۶!}=۸۴$$

$$n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}=۴+۱۰=۱۴$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

.19

$$\underbrace{\text{۵ کتاب فارسی}}\ \underbrace{\text{۳ کتاب انگلیسی}}$$

$$n(S)=۸!$$

$$n(A)=۵!\times ۳!\times ۲$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!\times ۳!\times ۲}{۸!}=\frac{۳\times ۲\times ۲}{۸\times ۷\times ۶}=\frac{۱}{۲۸}$$

.20

برای محاسبهٔ احتمال اینکه دو فرد موردنظر در کنار هم نباشند، احتمال اینکه هر دو فرد در کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم و از احتمال کل کم می‌کنیم.

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{۲نفر}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{۸نفر}}$$

دو نفر در کنار هم باشند:

$$P(A')=\frac{۲!۹!}{۱۰!}=\frac{۱}{۵}$$

دو نفر در کنار هم نباشند:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

.21

برای محاسبهٔ $P(B|A')$ به $P(B\cap A')$ و $P(A')$ نیاز است.

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$$

$$P(B\cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A\cap B) = ۰/۳ - P(A).P(B|A)$$
$$= ۰/۳ - ۰/۴ \times ۰/۲۵ = ۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۲$$

پس:

$$P(B|A') = \frac{P(B\cap A')}{P(A')} = \frac{۰/۲}{۰/۶} = \frac{۱}{۳}$$

.22

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : قبولی در آزمون اول

B : قبولی در آزمون وم

$$P(A) = ۰/۹ \quad , \quad P(B) = ۰/۹ \quad , \quad P(A\cap B) = ۰/۸۵$$

مطلوب مسئله $P(A|B)$ است:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۸۵}{۰/۹} = \frac{۸۵}{۹۰} = \frac{۵\times ۱۷}{۵\times ۱۸} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

.23

احتمال قبولی در آزمون اول را $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون دوم را $P(B)$ فرض می‌کنیم.

$$P(A) = ۰/۷ \ , \ P(B) = ۰/۶ \ , \ P(B|A) = ۰/۸$$

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B\cap A) = ۰/۷ \times ۰/۸ = ۰/۵۶$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = ۰/۷ + ۰/۶ - ۰/۵۶$$
$$= ۱/۳ - ۰/۵۶ = ۰/۷۴$$

.24

طبق فرض، پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} A : \text{بدون رقیب اصلی} \\ B : \text{کسب مدال طلا} \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} \begin{cases} P(A) = \frac{۱}{۵} \\ P(B) = \frac{۱}{۳} \\ P(B|A) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{۱}{۱۰} \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال، احتمال $A\cup B$ است:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۶ + ۱۰ - ۳}{۳۰} = \frac{۱۳}{۳۰}$$

.25

احتمال بیماری را $P(A)$ و احتمال بهبود یافتن را $P(B)$ در نظر می‌گیریم. طبق مفروضات سؤال داریم:

$$P(A) = ۰/۰۸, P(B|A) = ۰/۵$$

خواسته سوال $P(A\cap B)$ است.

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = ۰/۵ \Rightarrow \frac{p(A\cap B)}{۰/۰۸} = ۰/۵$$

$$P(A\cap B) = ۰/۰۸ \times ۰/۵ = ۰/۰۴ \xrightarrow{\text{درصد}} ۰/۰۴ \times ۱۰۰ = ۴$$

.26

چون هیچ اطلاعی از رنگ مهره‌های خارج‌شده نداریم، پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفید بودن این مهره را به دست آوریم:

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{۳}{۷}$$

.27

رابطهٔ احتمال اجتماع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
&\Rightarrow ۰/۶=P(A)+P(B)-۰/۱\Rightarrow P(A)+P(B)=۰/۷
\end{aligned}
$$

همچنین چون A و B مستقل‌اند، پس:

$$
P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow P(A).P(B)=۰/۱\Rightarrow P(A)=\frac{۰/۱}{P(B)}
$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
&P(A)+P(B)=۰/۷\Rightarrow \frac{۰/۱}{P(B)}+P(B)=۰/۷\Rightarrow P^{۲}(B)-۰/۷P(B)+۰/۱=۰\\
&P(B)=\frac{۰/۷\pm\sqrt{۰/۴۹-۰/۴}}{۲}=\frac{۰/۷\pm ۰/۳}{۲}\Rightarrow P(B)=۰/۵\ ,\ ۰/۲
\end{aligned}
$$

باتوجه‌به اینکه $P(B')>P(B)$ است، پس $P(B)=۰/۲$.

.28

وقتی A و B باشند، A و B' نیز مستقل‌اند. پس:

$$
\begin{aligned}
&P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۶\\
&P(A\cap B')=P(A)P(B')=۰/۲\\
&\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B')}=\frac{P(B)}{P(B')}=\frac{۰/۶}{۰/۲}=۳\\
&\Rightarrow P(B)=۳P(B')\quad ,\quad P(B)+P(B')=۱\\
&\Rightarrow P(B')=\frac{۱}{۴}\quad ,\quad P(B)=\frac{۳}{۴}
\end{aligned}
$$

حال چون $P(A)P(B)=۰/۶$، پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و داریم:

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')\\
&=\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵
\end{aligned}
$$

.29

$$
\left.\begin{aligned}
&P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{P(A')}\\
&A,B\rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۱۲}
\end{aligned}\right\}P(B'|A')=\frac{\frac{۷}{۱۲}}{\frac{۵}{۶}}=۰/۷
$$

.30

$$
\begin{aligned}
&P(A)=\frac{۱}{۷}\Rightarrow P(x)+P(y)=\frac{۱}{۷}\\
&P(B)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(B')=\frac{۲}{۵}\Rightarrow P(w)=\frac{۲}{۵}\\
&P(C)=\underbrace{P(x)+P(y)}_{\frac{۱}{۷}}+\underbrace{P(w)}_{\frac{۲}{۵}}=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۵}=\frac{۱۹}{۳۵}
\end{aligned}
$$

.31

گام اول

الف) پیشامد داشتن تحصیلات ابتدایی را با A و پیشامد داشتن مهارت قالی‌بافی را با B نشان می‌دهیم. هدف محاسبه $P(A\cup B)$ است.

ب) می‌دانیم

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ج) دو پیشامد A و B مستقل‌اند پس $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

با محاسبه $P(A\cap B)$ می‌توان $P(A\cup B)$ را حساب کرد.

گام دوم

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times ۰/۲۵=۰/۱۵$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۲۵-۰/۱۵=۰/۷$$

.32

ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ است.

سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

۱) در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند: $P_۱=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

۲) در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_۲=\underbrace{(۱-\overset{\text{هر دو زوج}}{\overset{\uparrow}{\frac{۱}{۴}}})}_{\text{پرتاب اول}}\underbrace{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب دوم}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۱۶}$$

۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_۳=\underbrace{(۱-\overset{\text{هر دو زوج}}{\overset{\uparrow}{\frac{۱}{۴}}})}_{\text{پرتاب اول}}\underbrace{(۱-\overset{\text{هر دو زوج}}{\overset{\uparrow}{\frac{۱}{۴}}})}_{\text{پرتاب دوم}}\underbrace{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب سوم}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۶۴}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر}: P=P_۱+P_۲+P_۳$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶}{۶۴}+\frac{۱۲}{۶۴}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

.33

A: پیشامد آن است که هر دو سکه رو بیاید.

B: پیشامد آن است که تاس ۶ بیاید.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}$$
$$=\frac{۶+۴-۱}{۲۴}=\frac{۹}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

نکته: دقت کنید که A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر هستند.

.34

$$\text{پرتاب دو سکه}:\begin{cases}\text{جفت رو}:\ \frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{یک سکه می‌اندازیم}\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}\text{صفر}\\ (\text{رو},\text{پشت}):\ \frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{دو سکه می‌اندازیم}\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}\text{یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم}:\frac{۱}{۲}\\ (\text{پشت},\text{رو}):\ \frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{دو سکه می‌اندازیم}\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}\text{یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم}:\frac{۱}{۲}\\ \text{جفت پشت}:\ \frac{۱}{۴}\Rightarrow \text{یک سکه می‌اندازیم}\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}\text{یک رو ظاهر شود}:\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\text{در کل}:\frac{۱}{۴}\times ۰+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۸}$$

.35

گام اول: احتمال هر پیشامد را حساب می‌کنیم:

$$P(A)=\text{فقط یک سکه رو}=\binom{۳}{۱}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۳}{۸}$$

$$P(B)=\text{تاس زوج}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(\text{مطلوب})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

توجه داشته باشید که دو پیشامد از هم مستقل‌اند، بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

.36

اگر پیشامد آنکه جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ باشد را با A و پیشامد آنکه سکه رو ظاهر شود را با B نمایش دهیم، آنگاه متمم پیشامد A آن است که جمع دو تاس کمتر یا مساوی ۴ باشد. در این صورت داریم:

$$A'=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۶}$$

همچنین احتمال وقوع پیشامد B برابر $P(B)=\frac{۱}{۲}$ است. دو پیشامد A و B، مستقل از یکدیگرند، پس $P(A\cap B)=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۲}$ است. داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

.37

راه‌حل اول:

دو پیشامد مستقل از یکدیگرند:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=۰/۹+۰/۸-۰/۹\times ۰/۸=۰/۹۸\end{aligned}$$

راه‌حل دوم:

متمم پیشامد آنکه "حداقل یک نفر عمل موفقیت‌آمیز داشته باشد" آن است که "هیچ‌کدام عمل موفقیت‌آمیز نداشته باشند"، ازآنجاکه عمل جراحی A و B مستقل از هم است، احتمال پیشامد اخیر برابر است با:

$$(۱-۰/۹)\times(۱-۰/۸)=۰/۰۲$$

پس احتمال موردنظر سؤال، برابر می‌شود با $۱-۰/۰۲=۰/۹۸$.

.38

راه‌حل اول:

چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{84}{100}+\frac{75}{100}-\left(\frac{84}{100}\times\frac{75}{100}\right)=0/96$$

راه‌حل دوم:

هرگاه در مسائل احتمال لااقل یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم (C' : احتمال اینکه هیچ‌کدام قبول نشوند):

$$P(C')=\frac{16}{100}\times\frac{25}{100}=\frac{4}{100}\Rightarrow P(C)=1-\frac{4}{100}=\frac{96}{100}$$

.39

$$P(A)=2P(B)=2x$$
$$P(A\cup B)=\frac{7}{9}\Rightarrow P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)}=\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow 2x+x-2x(x)=\frac{7}{9}\Rightarrow 3x-2x^2=\frac{7}{9}$$
$$\xrightarrow{\times 9} 27x-18x^2=7\Rightarrow 18x^2-27x+7=0$$

$$\Rightarrow (3x-1)(6x-7)=0\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} & \checkmark \\ x=\frac{7}{6} & \times \end{cases}$$

بنابراین $P(A)=2x=\frac{2}{3}$ است.

.40

احتمال خواسته‌شده را به‌صورت زیر مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$P(A)=$ احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید × اگر مهرهٔ خارج‌شده از ظرف اول سفید باشد
+ احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید × اگر مهره خارج‌شده از ظرف اول سیاه باشد

$$P(A)=\frac{6}{9}\times\frac{\binom{5}{2}+\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}+\frac{3}{9}\times\frac{\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{10+25}{45}+\frac{1}{3}\times\frac{6+24}{45}=\frac{2\times 35+1\times 30}{3\times 45}=\frac{70+30}{3\times 45}=\frac{100}{3\times 45}=\frac{20}{27}$$

.41

شکل نمودار درختی مسئله به‌صورت زیر است:

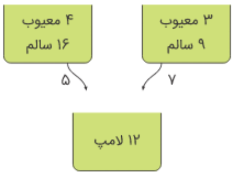
احتمال خواسته‌شده عبارت است از:

$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{0}{\binom{9}{2}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{9}{2}}{\binom{9}{2}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}}$$
$$=0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{10+20}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{30}{36}=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{11}{6}=\frac{11}{18}$$

.42

$$14x+15x+16x=1\Rightarrow x=\frac{1}{45}$$
$$P(A)=\frac{14}{45}\times\frac{5}{14}+\frac{15}{45}\times\frac{6}{15}+\frac{16}{45}\times\frac{4}{16}=\frac{5+6+4}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

.43

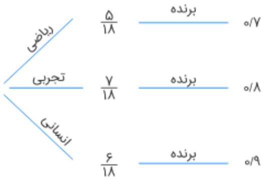


در جعبهٔ جدید در کل ۱۲ لامپ وجود دارد. حال اگر لامپی از جعبهٔ جدید انتخاب کنیم، احتمال اینکه به ترتیب متعلق به جعبهٔ اول و دوم باشد برابر $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ است. همچنین احتمال معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ اول و دوم برابر $\frac{۴}{۲۰}$ و $\frac{۳}{۱۲}$ است. فرض کنید A پیشامد معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ جدید باشد، پس:

$$P\left(A\right)=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۴}{۲۰}+\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۷}{۴۸}=\frac{۱۱}{۴۸}$$

.44

فرض کنید A پیشامد برنده‌شدن بهروز باشد، پس:



$$P\left(A\right)=\frac{۵}{۱۸}\times ۰/۷+\frac{۷}{۱۸}\times ۰/۸+\frac{۶}{۱۸}\times ۰/۹$$
$$=\frac{۳۵}{۱۸۰}+\frac{۵۶}{۱۸۰}+\frac{۵۴}{۱۸۰}=\frac{۱۴۵}{۱۸۰}=\frac{۲۹}{۳۶}$$

.45

کارت اول اگر زوج باشد (۶ حالت) کارت دوم بدون جای‌گذاری ۱۱ حالت دارد. در این حالت فضای نمونه ۶۶ حالت دارد. می‌دانیم عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن به ۴ بخش‌پذیر باشد. که در این حالت اعداد ۲۴ - ۲۸ - ۲۱۲ - ۴۸ - ۴۱۲ - ۶۴ - ۶۸ - ۶۱۲ - ۸۴ - ۸۱۲ - ۱۰۴ - ۱۰۸ - ۱۰۱۲ - ۱۲۴ - ۱۲۸ به ۴ بخش‌پذیر است که ۱۵ حالت مساعد دارد.

اما اگر کارت اول فرد باشد (۶ حالت). تاس پرتاب می‌کنیم که در این حالت فضای نمونه ۳۶ حالت دارد، که اعداد ۱۲ - ۱۶ - ۳۲ - ۳۶ - ۵۲ - ۵۶ - ۷۲ - ۷۶ - ۹۲ - ۹۶ - ۱۱۲ - ۱۱۶ مضرب ۴ هستند که ۱۲ حالت مساعد دارد.

پس احتمال مطلوب آن $\frac{۹}{۳۴}=\frac{۲۷}{۱۰۲}=\frac{۱۵+۱۲}{۶۶+۳۶}$ می‌باشد.

.46

به هدف زدن علی و حسن دو پیشامد مستقل است. یعنی:

$$P(A).P(B)=P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۶\times ۰/۴=۰/۲۴$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۴-۰/۲۴=۰/۷۶$$

سؤال از ما حاصل $P(A|A\cup B)$ را خواسته است. پس داریم:

$$P(A|A\cup B)=\frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{۰/۶}{۰/۷۶}=\frac{۱۵}{۱۹}$$

.47

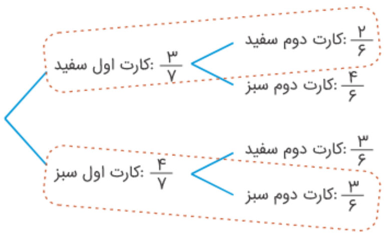
گام اول

کارت اول می‌تواند سفید یا سبز باشد و کارت دوم هم می‌تواند سفید یا سبز باشد. حالت دلخواه همرنگ بودن دو کارت است یعنی هر دو سبز یا هر دو سفید. دقت کنید که کارت‌ها بدون جای‌گذاری بیرون آورده می‌شوند و کل کارت‌های موجود برابر است با: $۳ + ۴ = ۷$

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال همرنگ بودن دو کارت را محاسبه می‌کنیم.

$$P(\text{همرنگ بودن}) = P(\text{هر دو سفید}) + P(\text{هر دو سبز}) = \left(\frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶}\right) + \left(\frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶}\right) = \frac{۱}{۷} + \frac{۲}{۷} = \frac{۳}{۷}$$



.48

$$\begin{cases} \frac{۱}{۳} : A \xrightarrow{۰} \text{قرمز} \\ \frac{۱}{۳} : B \xrightarrow{۱} \text{قرمز} \\ \frac{۱}{۳} : C \xrightarrow{\frac{۲}{۱۰}} \text{قرمز} \end{cases}$$

$$P(B|\text{قرمز}) = \frac{۱ \times \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳} \times ۰ + \frac{۱}{۳} \times ۱ + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۱۰}} = \frac{۵}{۶}$$

.49

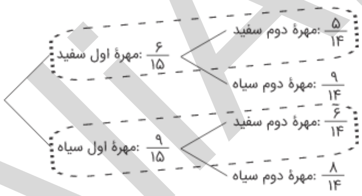
گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفیدبودن مهرهٔ دوم بر اساس حالت مهرهٔ اول قابل محاسبه است.

ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهرهٔ اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفیدبودن مهرهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



بنابراین داریم:

$$P\left(\text{دو مهرهٔ سفید}\right) = \left(\frac{۶}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۴}\right) + \left(\frac{۹}{۱۵} \times \frac{۶}{۱۴}\right) = \frac{۳۰ + ۵۴}{۲۱۰} = \frac{۸۴}{۲۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

روش دوم:

بدون توجه به رنگ مهرهٔ اول و با فرض اینکه هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفیدبودن رنگ مهرهٔ دوم برابر $\frac{۲}{۵}$ است.

.50

راه‌حل اول:

باتوجه‌به آنکه رنگ مهرهٔ اولی که از جعبه خارج شده، مشاهده نشده است، مثل این است که مهره‌ای خارج نشده، پس احتمال خروج مهرهٔ سفید در انتخاب دوم $\frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$ است.

راه‌حل دوم:

پیشامد سفیدبودن کارت اول: B

پیشامد سیاه‌بودن کارت اول: B'

پیشامد سفیدبودن کارت دوم: A

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۹}$$
$$= \frac{۵۴}{۹۰} = ۰/۶$$

.51

بیایید بدون فرمول و رابطهٔ خاصی این تست را حل کنیم. می‌دانیم انتخاب دو گوی به طور متوالی ۱۵×۱۶ حالت دارد که در نصف آن‌ها گوی دوم کمتر از گوی اول ظاهر می‌شود! پس فضای نمونه ما ۱۲۰ خواهد بود. حال اگر بدانیم گوی اول ۱۶ آمده است، برای گوی دوم ۱۵ حالت قابل قبول است. یعنی احتمال موردنظر ما برابر $\frac{۱۵}{۱۲۰}$ یا همان $\frac{۱}{۸}$ است.

.52

مهرهٔ اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}} = \frac{\frac{۵ \times ۴}{۲}}{\frac{۱۱ \times ۱۰}{۲}} = \frac{۲}{۱۱}$$

.53

در پرتاب همزمان دو تاس، اعداد روشده m و n هستند. با کدام احتمال، معادلهٔ $x^۲ - mx + n = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱۷}{۳۶}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

$$\Delta = (-m)^۲ - ۴(۱)(n) = m^۲ - ۴n > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۴n$$

حال سراغ حالت‌بندی بروید. (حواسمان هست $n(S) = ۳۶$ می‌باشد.)

m	n	تعداد حالات
۱	-	۰
۲	-	۰
۳	۲ یا ۱	۲
۴	۳ یا ۲ یا ۱	۳
۵	۶ یا ... یا ۲ یا ۱	۶
۶	۶ یا ... یا ۲ یا ۱	۶
مجموع		۱۷

$$P(A) = \frac{۱۷}{۳۶}$$

54.

در پرتاب nاُم، mاُمین "رو" ظاهر شود، یعنی در $n-۱$ پرتاب قبلی $m-۱$ بار "رو" ظاهر شده باشد.

$$\Rightarrow \frac{\binom{n-۱}{m-۱}}{۲^n} = \frac{m}{m+۳} \times \frac{\binom{n}{m}}{۲^n}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(m-۱)!(n-۱-m+۱)!} = \frac{m}{m+۳} \times \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(m-۱)!} = \frac{m}{m+۳} \times \frac{n!}{m!}$$
$$\Rightarrow ۱ = \frac{m}{m+۳} \times \frac{n}{m} \Rightarrow n = m+۳$$
$$\Rightarrow nm = m(m+۳) \xrightarrow{m=۵} nm = ۵ \times ۸ = ۴۰$$

55.

با استفاده از فرمول احتمال کل داریم:

$$P = ۰/۴۵ \times ۰/۲ + ۰/۲ \times ۰/۲۵ + ۰/۳۵ \times ۰/۳ = ۰/۲۴۵$$

56.

پیشامد اینکه در n بار پرتاب دقیقاً بار kاُم "رو" ظاهر شود مانند این است که تمام $k-۱$ بار قبلی در $n-۱$ پرتاب پشت ظاهر شده باشد:

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \frac{k}{k+۵}\binom{n}{k}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{k}{k+۵}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$\Rightarrow ۱ = \frac{k}{k+۵}\frac{n}{k} \Rightarrow ۱ = \frac{n}{k+۵} \Rightarrow n = k+۵ \xrightarrow{+k} n+k = ۲k+۵$$

$n+k$ باید عددی فرد و بزرگتر از ۷ باشد. تنها گزینه با این ویژگی‌ها گزینهٔ ۲ است.

57.

$$۰/۴ \times ۰/۲۵ + ۰/۳۵ \times ۰/۳ + ۰/۲۵ \times ۰/۳۵ = ۰/۱ + ۰/۱۰۵ + ۰/۰۸۷۵ = ۰/۲۹۲۵$$

۲۹/۲۵ درصد احتمال دارد امیر در رشته پزشکی قبول شود.