فصل ۱۱ : بانک سوالات کنکور " شمارش بدون شمردن"

.1

گام اول

دقت کنید که گفته شده حداقل ۲ نفر از بین ۳ نفر انتخاب شده، باید از رشتهٔ تجربی باشند. دو حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول این که ۲ نفر تجربی و یک نفر ریاضی باشند و حالت دوم این که هرسه نفر تجربی باشند.

گام دوم

تعداد حالت‌های انتخاب دانش‌آموزها با شرط انتخاب حداقل ۲ دانش‌آموز تجربی برابراست با:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۱}}_{\text{دو دانش آموز تجربی و یک دانش آموز ریاضی}} + \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{هر سه تجربی}} = (۱۰\times ۳)+۱۰ = ۳۰+۱۰ = ۴۰$$

.2

چون می‌خواهیم در هر رشتهٔ ورزشی، حداقل یک دانش‌اموز ثبت‌نام کند، باید این ۶ نفر به حالت‌های زیر در ۴ رشتهٔ ورزشی ثبت‌نام کنند:

	رشته ۴	رشته ۳	رشته ۲	رشته ۱	
حالت ۱:	۱نفر	۱نفر	۲نفر	۲نفر	$۶\times\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۱۰۸۰$
حالت ۲:	۱نفر	۱نفر	۱نفر	۳نفر	$۴\times\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}=۴۸۰$

پس تعداد کل حالت‌ها برابر $۱۰۸۰+۴۸۰=۱۵۶۰$ است.

.3

$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک رقم از بین ۲, ۴, ۶, ۸}}\times\overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{انتخاب سه رقم از بین ۱, ۳, ۵, ۷, ۹}}\times\underbrace{۴!}_{\text{جایگشت ۴ رقم در کنار هم}} = ۴\times ۱۰\times ۲۴ = ۹۶۰$$

.4

گام اول

الف) عدد ما پنج‌رقمی است پس به پنج رقم از بین نه رقم موجود نیاز داریم.

ب) در صورت تست گفته شده درست دو رقم زوج باشد یعنی برای تشکیل این عدد پنج‌رقمی، باید دو رقم از بین چهار رقم زوج و سه رقم از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد اعداد پنج‌رقمی با دو رقم زوج} = \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو رقم از بین ارقام ۲و۴،۶،۸}}\times\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{سه رقم از بین ارقام ۱و۳،۵،۷،۹}}\times\underbrace{۵!}_{\text{حالت‌های مختلف قرار گرفتن ارقام}}$$

$$= ۶\times ۱۰\times ۱۲۰ = ۷۲۰۰$$

.5

گام اول

الف) عدد موردنظر ما چهار رقم دارد.

ب) ارقام به‌کار رفته در عدد باید متمایز باشند یعنی رقم تکراری نداشته باشیم.

ج) فقط باید از ارقام فرد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده کنیم.

د) این عدد چهاررقمی باید بزرگ تر از ۳۰۰۰ باشد یعنی در جایگاه هزارگان نمی‌شود از رقم ۱ استفاده کرد.

گام دوم

پس تعداد ارقام چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگ تر از ۳۰۰۰ برابر است با:

$$\underset{\text{یک رقم از بین ۳و۵،۷،۹}}{\underset{\downarrow}{۴}} \times \underset{\text{رقم۱به ارقام موجود اضافه می شود}}{\underset{\downarrow}{۴}} \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

.6

گام اول

الف) بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود پس برای یک بازی ۲ نفر در مقابل ۲ نفر، باید از بین ۸ مدرسه دو مدرسه، انتخاب شود.

ب) هر مدرسه ۶ دانش‌آموز برای بازی تنیس دارد. از بین این ۶ نفر باید ۲ نفر برای بازی انتخاب شود، یعنی برای هریک از مدارس $\binom{۶}{۲}$ انتخاب داریم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{انتخاب ۲مدرسه از ۸مدرسه}} \times \overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه اول}} \times \underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه دوم}} = ۲۸ \times ۱۵ \times ۱۵ = ۶۳۰۰$$

.7

گام اول

رقم صدگان باید از ارقام یکان و دهگان بزرگ تر باشد. پس ما نمی‌توانیم دو رقم ۱ و ۳ را در جایگاه صدگان به کار ببریم. برای هریک از ارقام ۵ و ۷ و ۹ که در جایگاه صدگان قرار می‌گیرند، حالت‌های موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

گام دوم

۱) رقم صدگان ۵ : $۵۳۱ \Rightarrow$ یک حالت

۲) رقم صدگان ۷ : $۷۵۳, ۷۵۱, ۷۳۱ \Rightarrow$ سه حالت

۳) رقم صدگان ۹ : $۹۷۵, ۹۷۳, ۹۷۱, ۹۵۳, ۹۵۱, ۹۳۱ \Rightarrow$ شش حالت

تعداد کل حالت‌ها : $۱ + ۳ + ۶ = ۱۰$

راه‌حل دوم: ابتدا سه رقم متمایز از بین این ۵ رقم انتخاب می‌کنیم که به $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ حالت امکان‌پذیر است. واضح است که با هر سه رقم متمایز، فقط یک عدد سه‌رقمی با شرط داده‌شده می‌توان نوشت، پس تعداد اعداد موردنظر ۱۰تا است.

.8

ابتدا از میان پنج مدرسهٔ A، B، C، D و E سه تا را انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. حال از هرکدام از این سه مدرسهٔ انتخابی، باید فقط یک نفر را انتخاب کنیم. چون از هر مدرسه چهار نفر به اردوگاه دعوت شده‌اند؛ پس برای انتخاب یک نفر از هرکدام از سه مدرسه، چهار حالت امکان‌پذیر است. یعنی با مشخص بودن مدارس، $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$ حالت برای انتخاب دانش‌آموزان وجود دارد.

$$\binom{۵}{۳} \times ۴^۳ = ۱۰ \times ۶۴ = ۶۴۰$$

9.

اول ۳تا از مدرسه‌ها را به $\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب می‌کنیم. بعد از هر مدرسه ۱ نفر برمی‌داریم.

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴\times۴\times۴=۶۴۰$$

10.

رقم ۵ می‌تواند در جایگاه‌های هزارگان، صدگان، دهگان یا یکان باشد.

اگر رقم ۵ در جایگاه هزارگان باشد:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵ باشد}}}{\underline{\ ۱\ }}\ \ \underline{\ ۹\ }\ \ \underline{\ ۸\ }\ \ \underline{\ ۷\ }\ :\ ۹\times۸\times۷=۵۰۴$$

اگر رقم ۵ در یکی از جایگاه‌های صدگان، دهگان یا یکان باشد:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{صفر نباید}\\ \text{باشد}}}{\underline{\ ۸\ }}\ \ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{یک ۵}\\ \text{داشته باشد}}}{\underbrace{\overbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}}^{۱\times۸\times۷}}}\ :\ ۸\times۱\times۸\times۷\times۳=۱۳۴۴$$

پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$۱۳۴۴+۵۰۴=۱۸۴۸$$

11.

دو حالت داریم: (می‌دانیم ۵ رقم زوج به همراه صفر داریم و ۵ رقم فرد)

با فرد شروع کنیم : $\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳}=۱۲۰۰$

با زوج شروع کنیم : $\underline{۴}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳}=۹۶۰$

$$\Rightarrow ۱۲۰۰+۹۶۰=۲۱۶۰$$

توجه کنید که صفر ابتدای عدد نمی‌تواند ظاهر شود!

12.

برای توزیع کتاب دو حالت زیر را داریم:

۱) یک نفر فقط یک کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام دو کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام دو کتاب می‌دهیم. سپس یک کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

$\underline{\text{یک کتاب}}\ \underline{\text{دو کتاب}}\ \underline{\text{دو کتاب}}$

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}=۳\times\frac{۵!}{۲!۳!}\times۳\times۱=۹۰$$

۲) یک نفر سه کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام یک کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام یک کتاب می‌دهیم. سپس سه کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

$\underline{\text{یک کتاب}}\ \underline{\text{یک کتاب}}\ \underline{\text{سه کتاب}}$

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}=۳\times۵\times۴\times۱=۶۰$$

در انتها تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم:

$$۹۰+۶۰=۱۵۰$$

.13

برای اینکه عددی بر ۵ بخش‌پذیر باشد، رقم یکان آن باید ۰ یا ۵ باشد؛ پس مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر رقم یکان صفر باشد:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{صفر نباید باشد}}}{\underline{۹}}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{صفر باشد}}}{\underline{۱}}\ :\ ۹ \times ۸ \times ۷ = ۷۲ \times ۷ = ۵۰۴$$

حالت دوم: اگر رقم یکان ۵ باشد:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{صفر نباید باشد}}}{\underline{۸}}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{۵ باشد}}}{\underline{۱}}\ :\ ۸ \times ۸ \times ۷ = ۶۴ \times ۷ = ۴۴۸$$

پس تعداد کل حالات $۵۰۴ + ۴۴۸ = ۹۵۲$ است.

.14

$$\underline{AB}\,C\,D\,E \Rightarrow ۲! \times ۴! = ۴۸$$

.15

برای اینکه دو نفر مشخص باهم در مهمانی نباشند دو حالت زیر را داریم:

۱) از آن دو نفر فقط یکی در مهمانی باشد.

۲) هیچ‌کدام از آن دو نفر در مهمانی نباشند.

بنابراین داریم:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}}_{\text{حالت اول}} + \underbrace{\binom{۲}{۰}\binom{۷}{۵}}_{\text{حالت دوم}} = ۲ \times \frac{۷!}{۴!۳!} + ۱ \times \frac{۷!}{۵!۲!}$$

$$۲ \times \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵}{\cancel{۶}} + \frac{۷ \times \cancel{۶}^{۳}}{\cancel{۲}} = ۷۰ + ۲۱ = ۹۱$$

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{۲ نفر}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{۷ نفر}}$$

.16

ازآنجایی‌که ۲ کتاب آمار داریم، این دو کتاب نمی‌توانند در ابتدا و انتها قرار گیرند، پس تنها حالت زیر اتفاق می‌افتد (R کتاب ریاضی - A کتاب آمار):

$$R\ R\ A\ A\ R\ R \Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = ۴! \times ۲! = ۴۸$$

توجه: دقت کنید که در صورت سؤال عنوان شده ۲ کتاب مجاور هر کتاب، این حالت با حالتی که دو کتاب مجاور متفاوت باشند، تفاوت دارد.

.17

حالت‌های انتخاب ۴ کتاب از ۷ کتاب به‌صورت زیر است:

تعداد حالت‌ها	زیست	فیزیک	ریاضی
$\binom{۴}{۲}\binom{۱}{۱}\binom{۱}{۱} = ۶$	✓	×	✓
$\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱} = ۴$	×	✓	×
$\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱} = ۴$	✓	×	×
$\binom{۴}{۴} = ۱$	×	×	×

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = ۶ + ۴ + ۴ + ۱ = ۱۵$$

.18

از اصل متمم بهره می‌گیریم:

کل حالات : $\underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳} = ۲۵۲۰$

حال باید حالت‌هایی که دو نفر خاص در بین این ۵ نفر بوده و کنار هم می‌نشینند را از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم، درصورتی‌که دو نفر خاص انتخاب شده باشند، باید از ۵ نفر دیگر ۳ نفر انتخاب کرد، این دو نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{\underline{۴}}_{۲!}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} = ۲! \times ۴! = ۴۸$$

بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر $۴! \times ۲!$ است، پس تعداد حالت‌هایی که این دو نفر خاص کنارهم می‌نشینند، برابر است با:

$$\binom{۵}{۳} \times ۲! \times ۴! = ۱۰ \times ۲ \times ۲۴ = ۴۸۰$$

حالا برای محاسبهٔ حالت مطلوب داریم:

مطلوب : کل − نامطلوب $= ۲۵۲۰ - ۴۸۰ = \underline{۲۰۴۰}$

.19

تعداد انتخاب‌ها به‌صورت زیر است:

$$\binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۵} + \binom{۸}{۶} = \frac{۸!}{۴!۴!} + \frac{۸!}{۵!۳!} + \frac{۸!}{۶!۲!}$$
$$= \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{۸ \times ۷ \times ۶}{۶} + \frac{۸ \times ۷}{۲} = ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴$$

.20

گام اول

الف) دانش‌آموزان باید دو به دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند. بنابراین برای داشتن ۳ دانش‌آموز باید ۳ منطقه از بین ۶ منطقهٔ کشوری انتخاب شود تا مطمئن باشیم دو دانش‌آموز هم‌منطقه‌ای نداریم.

ب) هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد که هرکدام از این ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند انتخاب شوند.

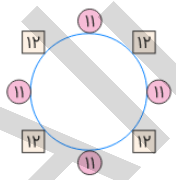
گام دوم

تعداد کل حالت ها = $\underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{انتخاب۳منطقه ازبین۶منطقه}} \times \underbrace{\binom{۱۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۱}}_{\text{هرکدام از ۱۵دانش آموز این۳منطقه می توانند دعوت شوند}} = ۲۰ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ = ۶۷۵۰۰$

.21

دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم اول به $۶ = (۴-۱)!$ طریق دور میز می‌نشینند.

حالا ۴ دانش‌آموز دوازدهم به $۴!$ طریق در ۴ جایگاه بین آن‌ها قرار می‌گیرند.



جواب : $۶ \times ۴! = ۱۴۴$

.22

رقم یکان باید ۸ باشد تا زوج بوده و بر ۶ بخش‌پذیر شود. از طرفی چون متقارن باید باشد، پس رقم چهاردهم نیز باید ۸ باشد. تعداد ارقام ۷ باید زوج باشد تا تقارن حفظ شود. تنها حالاتی که می‌تواند قبول باشد داشتن ۴ رقم ۷ و ۱۰ رقم ۷ است. داریم:

الف) در حالتی که ۴ رقم ۷ داریم، می‌توان ۱۲ رقم وسط را نصف کرده و در هر ۶ رقم، دو رقم را ۷ قرار دهیم، پس داریم:

$$\boxed{۸}\ \underbrace{\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۷}\boxed{۷}}\ \underbrace{\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}}\ \boxed{۸} \to \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

ب) در حالتی که ۱۰ رقم ۷ داریم، می‌توان ۱۲ رقم وسط را نصف کرده و در هر ۶ رقم، ۵ رقم را ۷ قرار دهیم، پس داریم:

$$\boxed{۸}\ \underbrace{\boxed{۸}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}}\ \underbrace{\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۸}}\ \boxed{۸} \to \binom{۶}{۵} = ۶$$

بنابراین در مجموع ۲۱ عدد با چنین شرایط می‌توان ساخت.

.23

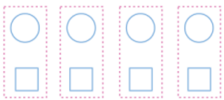
برای اینکه عددی مضرب ۶ باشد می‌بایست زوج بوده و بر ۳ نیز بخش‌پذیر باشد، بنابراین رقم یکان الزاماً باید ۲ باشد.

برای ۱۰ رقم اول می‌توان حالت‌های زیر را درنظر گرفت به‌صورتی که مجموع اعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

عدد ۱	عدد ۲
۱۰	۱
۷	۴
۴	۷
۱	۱۰

$$\binom{۱۰}{۱۰} + \binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۶} + \binom{۱۰}{۹} = ۱ + ۱۲۰ + ۲۱۰ + ۱۰ = ۳۴۱$$

.24



وزیر اول روی هشت صندلی می‌تواند بنشیند، پس ۸ انتخاب دارد. زمانی‌که وزیر اول ردیفی را انتخاب کرد، سه وزیر دیگر در همان ردیف و در ۳ صندلی خالی می‌توانند بنشینند، بنابراین !۳ حالت دارد.

درنتیجه تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۸ \times ۳! = ۴۸$$