فصل ۱۰ : بانک سوالات کنکور "کاربرد مشتق"

.1

تابع $y=x+\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y=x+\sqrt{x} \Rightarrow y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$$

.2

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$، ریشه‌های سادهٔ دو معادلهٔ $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ خواهد بود.

$$f(x)=|x^3-x|$$

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1$$

$$(x^3-x)'=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow 3x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}, x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x)=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ دارای شش نقطهٔ بحرانی $x=0$، $x=1$، $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$، $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$، $x=-1$ و $x=2$ است.

.3

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x)=0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\geq -1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادلهٔ $f'(x)=0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x=0$ تعریف‌نشده است اما $x=0$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

.4

$$y=\begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & ;x\geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & ;x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases} \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} & ;x\geq 0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow 1+x^2=0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} & ;x<0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

پس فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد.

تذکر: ضابطهٔ اول y' در $x=1$ مشتق ندارد، اما چون عضو دامنهٔ f نیست بحرانی نمی‌باشد.

.5

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴,۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

x		-۳		۵	
f'	+	۰	−	۰	+
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-۴,۳]$ $=-۳,-۴,۳$

$$\left.\begin{array}{l} f(-۴)=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳} \\ f(-۳)=\frac{(-۳)^{۳}}{۳}-۹+۴۵=۲۷ \\ f(۳)=\frac{۳^{۳}}{۳}-۹-۴۵=-۴۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{x\in[-۴,۳]} \begin{cases} y_{\min}=-۴۵ \\ y_{\max}=۲۷ \end{cases}$$

.6

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

ضابطهٔ $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y=\frac{۱}{۴}x^{۴}-x^{۳}-۲x^{۲} \Rightarrow y'=x^{۳}-۳x^{۲}-۴x=x(x-۴)(x+۱)$$

$$y'=۰ \Rightarrow x(x-۴)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(۰)=۰ \\ y(۴)=-۳۲ \\ y(-۱)=-\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده، $y=-۳۲$ کمترین مقدار تابع است.

.7

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y=x^{۳}-۳x^{۲}-۹x+۵ \Rightarrow y'=۳x^{۲}-۶x-۹$$

$$y'=۰ \Rightarrow ۳(x^{۲}-۲x-۳)=۳(x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

چون $۳ \notin [-۲,۲]$، پس مقدار تابع را به‌ازای $x=-۱,-۲,۲$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-۱)=-۱-۳+۹+۵=۱۰$$

$$f(۲)=۸-۱۲-۱۸+۵=-۱۷$$

$$f(-۲)=-۸-۱۲+۱۸+۵=۳$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y=۱۰$ است.

.8

نمودار تابع $m \in (-۱,۱)$ ، $f(x) = (m^۲ - ۱)x^۲ + (۲ - m)x + ۵$ محور xها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β کمترین مقدار باشد، m کدام است؟ (با تغییر)

۱) $-۲ + \sqrt{۵}$　　　۲) $-۲ + \sqrt{۳}$

۳) $۲ - \sqrt{۵}$　　　۴) $۲ - \sqrt{۳}$

$$\Delta_f = (۲ - m)^۲ - ۲۰(m^۲ - ۱) > ۰ \Rightarrow ۱۹m^۲ + ۴m - ۲۴ < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۲ - ۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۹} < m < \frac{-۲ + ۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۹} \ , m \in (-۱,۱) \Rightarrow m \in (-۱,۱)$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{m - ۲}{m^۲ - ۱} \Rightarrow S' = \frac{m^۲ - ۱ - ۲m(m - ۲)}{(m^۲ - ۱)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -m^۲ + ۴m - ۱ = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ - ۱}}{۱} = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

m	$-\infty$	-۱	۲-√۳	۱	۲+√۳	$+\infty$
S'		−	۰	+		
S		↘	min	↗		

$$\Rightarrow m = ۲ - \sqrt{۳}\ ,\ \ \Delta_f > ۰ \ \text{min}$$

.9

دامنهٔ تابع $D_f = [۰, \frac{a}{۲}]$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۲}{۲\sqrt{a - ۲x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۲}{\sqrt{a - ۲x}} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۴}{a - ۲x}$$

$$\Rightarrow ۴x = a - ۲x \Rightarrow x = \frac{a}{۶} \in [۰, \frac{a}{۲}]$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{۰, \frac{a}{۶}, \frac{a}{۲}\}$ می‌باشد. اکنون مقادیر نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم.

$$f(۰) = \sqrt{a}\ ,\ f(\frac{a}{۶}) = \sqrt{\frac{a}{۶}} + \sqrt{a - \frac{a}{۳}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} + \frac{۲\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

$$f(\frac{a}{۲}) = \sqrt{\frac{a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

بنابراین $max\, f(x) = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ و $min f(x) = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ است. پس:

$$\frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow \frac{۳a\sqrt{۳}}{۶} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow [a] = ۴$$

.10

دامنهٔ تابع برابر $x \in (۰, +\infty)$ است. درنتیجه نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم. لذا داریم:

$$y = \frac{۳a}{\sqrt[۴]{a^۳ \cdot x}} + \frac{x}{\sqrt[۴]{a^۳ \cdot x}} \Rightarrow y = ۳a^{\frac{۱}{۴}}x^{-\frac{۱}{۴}} + a^{-\frac{۳}{۴}}x^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow y' = ۳a^{\frac{۱}{۴}} \times \frac{-۱}{۴}x^{-\frac{۵}{۴}} + \frac{۳}{۴}a^{-\frac{۳}{۴}}x^{-\frac{۱}{۴}} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۴}a^{\frac{۱}{۴}}}{\sqrt[۴]{x^۵}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}} \times \frac{۱}{\sqrt[۴]{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt[۴]{a}}{\sqrt[۴]{x^۵}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}} \times \frac{۱}{\sqrt[۴]{x}} \Rightarrow x = a \Rightarrow f(a) = \frac{۳a + a}{\sqrt[۴]{a^۳ a}} = ۴$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} f(x) = +\infty$ ، لذا حداقل مقدار تابع برابر ۴ است.

.11

چون دامنهٔ تابع $[-1,3]$ است، پس $x_1=3$ و $x_2=-1$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^2+ax+b=0$ هستند.

$$x_1+x_2=\frac{-a}{-1}\Rightarrow -1+3=a\Rightarrow a=2$$

$$x_1x_2=\frac{b}{-1}\Rightarrow -1\times 3=-b\Rightarrow b=3$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیممش صفر است.

$$f'(x)=1+\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}=0\Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=1$$
$$\Rightarrow -x^2+2x+3=(x-1)^2\Rightarrow -x^2+2x+3=x^2-2x+1$$
$$\Rightarrow 2x^2-4x-2=0\Rightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$

$x=1+\sqrt{2}$ قابل‌قبول است.

$$f(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}+\sqrt{-(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})+3}$$
$$=1+\sqrt{2}+\sqrt{-1-2-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+3}=1+2\sqrt{2}$$

.12

نقاط بحرانی تابع $f(x)=x|3-x^2|$ را حساب می‌کنیم:

$$3-x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\in D\\ x=-\sqrt{3}\notin D\end{cases}$$

$$(x(3-x^2))'=0\Rightarrow(3x-x^3)'=0\Rightarrow 3-3x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\in D\\ x=-1\in D\end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-1,1,\sqrt{3},-1/5\}$ خواهد بود.

$$f(1)=2\ ,\ f(-1)=-2\ ,\ f(\sqrt{3})=0$$
$$f(-1/5)=f(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}|3-\frac{9}{4}|=\frac{-3}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-9}{8}$$

کمترین مقدار تابع -2 خواهد بود.

.13

$$f(0)=4\Rightarrow c=4$$
$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$\Rightarrow\begin{cases}f'(0)=0\Rightarrow b=0\\ f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+2ax=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-\frac{2a}{3}\end{cases}\end{cases}$$

$$f(-\frac{2a}{3})=0\Rightarrow(-\frac{2a}{3})^3+a(-\frac{2a}{3})^2+4=0$$
$$-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0\Rightarrow\frac{4a^3}{27}=-4\Rightarrow a^3=-27$$
$$\Rightarrow a=-3\Rightarrow x_{\min}=-\frac{2a}{3}=2$$

.15

نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است یا تابع در آن نقاط مشتق ندارد.

ریشه‌های سادهٔ قدر مطلق، نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

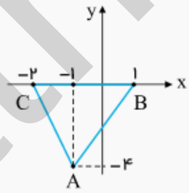
$$f(x) = (x-۱)\cdot|x^۲+x-۲|$$
$$x^۲+x-۲=۰ \rightarrow x=۱\ ,\ x=-۲$$

با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق می‌توانیم تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس مشتق بگیریم ولی به جای این کار می‌توانیم برای محاسبهٔ ریشهٔ مشتق قدر مطلق را پرانتز در نظر بگیریم، درنتیجه داریم:

$$f(x)=(x-۱)\cdot(x^۲+x-۲)=x^۳+x^۲-۲x-x^۲-x+۲$$
$$f(x)=x^۳-۳x+۲ \rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \rightarrow x=\pm ۱$$

با جایگذاری طول نقاط بحرانی یعنی $x=۱$، $x=-۱$ و $x=-۲$ عرض این نقاط را به دست می‌آوریم:

$$A(-۱,-۴)\ ,\ B(۱,۰)\ ،C(-۲,۰)$$



$$S=\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

.16

باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x>c \\ f(x)\geq f(c)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-c>۰ \\ f(x)-f(c)\geq ۰\end{cases} \qquad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x=c$ داریم:

$$f'_+(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\xrightarrow{(*)} f'_+(c)\geq ۰$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=c$ الزاماً نامنفی است.

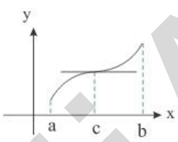
.17

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

گزینهٔ اول: اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینهٔ دوم: می‌دانیم هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، بحرانی می‌باشد، پس این گزینه درست است.

گزینهٔ سوم: فرض می‌کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، باتوجه‌به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:

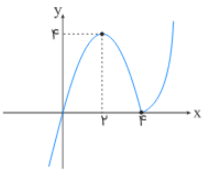


گزینهٔ چهارم: باتوجه‌به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینهٔ دوم، این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.

.18

$$f(x) = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & ; x \geq 4 \\ 4x - x^2 & ; x < 4 \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



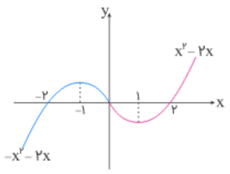
این تابع در $(4, 0)$ مینیمم نسبی و در $(2, 4)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

.19

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq 0 : f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x < 0 : f'(x) = -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

فاصله : $\sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

.20

$$y = (x-1)^2\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = 2(x-1)(x^{\frac{2}{3}}) + (x-1)^2\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right) \Rightarrow y' = \frac{6(x-1)x + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

صورت $= 0 \Rightarrow 2(x-1)(3x + (x-1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$

مخرج $= 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

باتوجه‌به گزینه‌ها $x = \frac{1}{4}$ جواب مسئله است.

.21

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادلهٔ $f'(x)=۰$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+۸x \Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x+۸$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۴(x^{۳}-۳x+۲)=۰ \Rightarrow ۴(x-۱)(x^{۲}+x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow ۴(x-۱)^{۲}(x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
			min				

باتوجه‌به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x=-۲$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x=۱$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=۰$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

.22

گام اول

الف) باتوجه‌به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $۰ \leq x-[x] < ۱$

ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x<y$ داریم: $f(x)<f(y)$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$۰ \leq x-[x] < ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱ < [x]-x \leq ۰ \Rightarrow -۱ < f(x) \leq ۰$$

$$gof(x)=g(f(x))=۲^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-۱ < f(x) \leq ۰ \xrightarrow{\text{اکیدا صعودی } g} g(-۱) < g(f(x)) \leq g(۰)$$

$$\Rightarrow ۲^{-۱} < ۲^{[x]-x} \leq ۲^{۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲^{[x]-x} \leq ۱ \quad \Rightarrow \frac{۱}{۲} < gof \leq ۱$$

بنابراین تابع gof دارای ماکزیمم و فاقد مینیمم است.

.23

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازهٔ $(۱,۴)$ پیوسته است. برای یافتن طول نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل کنیم.

همچنین می‌دانیم در معادلهٔ $f'(x)=۳x^۲+۲ax-۸=۰$ حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با: $\frac{c}{a}=\frac{-۸}{۳}<۰$، پس یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. درنتیجه جواب مثبت در بازهٔ $(۱,۴)$ قرار دارد. حال داریم:

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax-۸=۰\Rightarrow x=\frac{-a\pm\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}$$

$x=\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}$ مثبت است، پس در بازهٔ $(۱,۴)$ قرار دارد:

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}\Rightarrow ۱<\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}<۴$$

$$۱)\,۱<\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}\Rightarrow -a+\sqrt{a^۲+۲۴}>۳\Rightarrow\sqrt{a^۲+۲۴}>۳+a$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}a^۲+۲۴>a^۲+۶a+۹\Rightarrow ۶a<۱۵\Rightarrow a<۲/۵\quad(I)$$

$$۲)\,\frac{-a+\sqrt{a^۲+۲۴}}{۳}<۴\Rightarrow -a+\sqrt{a^۲+۲۴}<۱۲\Rightarrow\sqrt{a^۲+۲۴}<۱۲+a$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}a^۲+۲۴<a^۲+۲۴a+۱۴۴\Rightarrow ۲۴a>-۱۲۰\Rightarrow a>-۵\quad(II)$$

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)}-۵<a<۲/۵$$

.24

نمودار تابع $y=x^۳+ax^۲-۲bx-۴$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۱}$

۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰۱}$

ریشه‌های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y'=۳x^۲+۲ax-۲b$$

پس:

$$\xrightarrow{(۰,۰)}b=۰$$

$$\xrightarrow{(-۲,۰)}۳(-۲)^۲+۲a(-۲)=۰\Rightarrow ۱۲-۴a=۰\Rightarrow a=۳$$

حال ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$y=x^۳+۳x^۲-۴$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x=۰}(۰,-۴)\\ \xrightarrow{x=-۲}(-۲,۰)\end{cases}\xrightarrow{\text{فاصله}}\sqrt{(-۲-۰)^۲+(۰+۴)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

.25

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x^۲-x-۲)=۶(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=۲\end{cases}$$

اکسترمم‌های تابع در $x=-۱$ و $x=۲$ رخ می‌دهند.

$$f(-۱)=۸\Rightarrow\max:(-۱,۸)\qquad f(۲)=-۱۹\Rightarrow\min:(۲,-۱۹)$$

$$AB\text{ شیب }:\frac{۸-(-۱۹)}{-۱-۲}=\frac{۲۷}{-۳}=-۹$$

مشتق را برابر ۹− قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=-۹\Rightarrow ۶x^۲-۶x-۳=۰\Rightarrow\Delta>۰$$

۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

.26

$$y' = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

ریشه‌های این معادله ۰ و ۱ هستند، پس $c = 0$ است. داریم:

$$3ax^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{x=1} 3a + 2b = 0$$

ازطرفی چون $(0\,,\,0)$ در تابع صدق می‌کند، پس $d = 0$ است.

$$y = ax^3 + bx^2 \xrightarrow{(1,1)} 1 = a + b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow ab = -6$$

.27

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (2x+2)\,(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + 2x + 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 20 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	$-1+\sqrt{5}$ max	$\searrow$

$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1}$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 1}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = -1 + \sqrt{5}$$

.28

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \quad (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x - 2 \geq 0$ باشد، یعنی: $x \geq 2$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} & (x \geq 2 \ \text{غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2+\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2+\sqrt{2}) - (2+\sqrt{2})^2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}) \quad \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

.29

باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x>c \\ f(x)\ge f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-c>0 \\ f(x)-f(c)\ge 0 \end{cases} \qquad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x=c$ داریم:

$$f'_+(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \xrightarrow{(*)} f'_+(c)\ge 0$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=c$ الزاماً نامنفی است.

.30

نقطهٔ $B(x,\sqrt{2x+7})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(5,0)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{2x+7}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

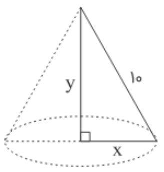
$$(AB)'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$
$$(AB)'=0\Rightarrow x=4\Rightarrow B(4,\sqrt{15})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(5,0),B(4,\sqrt{15})\Rightarrow AB=\sqrt{(5-4)^2+(0-\sqrt{15})^2}=4$$

.31

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^2+y^2=100\Rightarrow x^2=100-y^2 \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y\xrightarrow{(*)} V=\frac{1}{3}\pi(100-y^2)y=\frac{\pi}{3}(100y-y^3)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V'=\frac{\pi}{3}(100-3y^2)\Rightarrow\frac{\pi}{3}(100-3y^2)=0$$
$$\Rightarrow 100-3y^2=0\Rightarrow y^2=\frac{100}{3}$$
$$\Rightarrow x^2=100-y^2\Rightarrow x^2=100-\frac{100}{3}=\frac{300-100}{3}=\frac{200}{3}$$
$$\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}=\frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}}=2\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{2}$$

.32

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + y^۲ = (۵\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۵۰$$
$$\Rightarrow y^۲ = ۵۰ - x^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۵۰ - x^۲}$$
$$\Rightarrow f = ۳x + ۴y = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

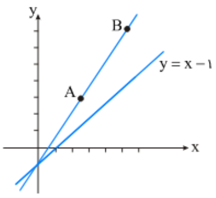
$$f'(x) = ۳ + ۴(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵۰ - x^۲}}) = ۳ - \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}}$$
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳ = \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۵۰ - x^۲} = ۴x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x>۰} ۹(۵۰ - x^۲) = ۱۶x^۲$$
$$\Rightarrow ۴۵۰ - ۹x^۲ = ۱۶x^۲ \Rightarrow ۲۵x^۲ = ۴۵۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = \sqrt{۱۸}$$
$$y = \sqrt{۵۰ - x^۲} = \sqrt{۵۰ - ۱۸} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$f_{\max} = ۳x + ۴y = ۳(۳\sqrt{۲}) + ۴(۴\sqrt{۲}) = ۹\sqrt{۲} + ۱۶\sqrt{۲} = ۲۵\sqrt{۲}$$

.33

دو نقطهٔ A و B و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x - ۱$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - ۱$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$
$$y - ۳ = \frac{۷ - ۳}{۴ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

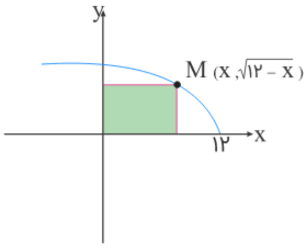
با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

بنابراین طول نقطهٔ M برابر با صفر است.

.34

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲ - x}$ است.

$$S' = \sqrt{۱۲ - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲ - x) - x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{\max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۱۶$$

.35

شکلی از سؤال را رسم می‌کنیم. مساحت مخروط را برحست ارتفاع آن یافته و سپس مینیمم آن را حساب می‌کنیم.

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \ , \ \ L^۲ = h^۲ + r^۲$$

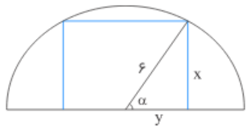
$$\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۳} \to r^۲ h = ۱ \to r^۲ = \frac{۱}{h}$$

$S = \pi\sqrt{\frac{۱}{h}} \times \sqrt{h^۲ + \frac{۱}{h}} = \pi\sqrt{h + \frac{۱}{h^۲}} \to S'(h) = ۰ \to$ کافیست مشتق زیر رادیکال را برابر صفر قرار دهیم.

$$\to ۱ - \frac{۲}{h^۳} = ۰ \to h^۳ = ۲ \to h = \sqrt[۳]{۲}$$

.36

راه‌حل اول:

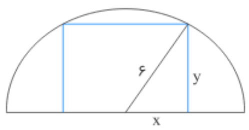


$$\sin\alpha = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 6\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x(2y) = 2(36)\sin\alpha\cos\alpha = 36\sin 2\alpha$

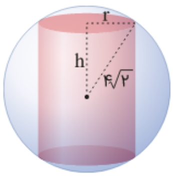
مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد. بنابراین: $S_{\max} = 36$

راه‌حل دوم:



$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$
$$S = 2xy = 2x\sqrt{36 - x^2}$$
$$S' = 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{-4x^2}{2\sqrt{36 - x^2}} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 36 - x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$S_{\max} = 2 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 36$$

.37



$$h^2 + r^2 = 32 \Rightarrow h = \sqrt{32 - r^2}$$

مساحت جانبی : $f = 2\pi r \times 2h = 4\pi r\sqrt{32 - r^2} = 4\pi\sqrt{32r^2 - r^4}$

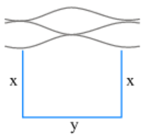
$$f' = 4\pi \times \frac{64r - 4r^3}{2\sqrt{32r^2 - r^4}} = 0 \begin{cases} r = 0 & \text{غلط} \\ r = 4 & \text{درست} \end{cases}$$

اگر $r = 4$ باشد $h = 4$ است.

$$\max(S) = 4\pi(4)(4) = 64\pi$$

.38

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + ۲x = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(۸۸ - ۲x) = ۸۸x - ۲x^۲$$

برای محاسبهٔ بیشترین مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = ۸۸ - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow ۴x = ۸۸ \Rightarrow x = ۲۲ \ , \ y = ۸۸ - ۴۴ = ۴۴$$

بنابراین:

$$S_{\max} = xy = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

.39

گام اول

فاصلهٔ میان دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

گام دوم

نقطهٔ موردنظر را $M(\alpha, ۰)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه‌به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + (۵ - ۰)^۲} = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}$$
$$|MB| = \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + (-۲ - ۰)^۲} = \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشهٔ مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵} - \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}$$
$$d'(\alpha) = \frac{-۲(۱ - \alpha)}{۲\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}} - \frac{-۲(۷ - \alpha)}{۲\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} = \frac{(۷ - \alpha)}{\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} - \frac{(۱ - \alpha)}{\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}}$$
$$d'(\alpha) = ۰ \Rightarrow \frac{(۷ - \alpha)}{\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} = \frac{(۱ - \alpha)}{\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(۷ - \alpha)^۲}{(۷ - \alpha)^۲ + ۴} = \frac{(۱ - \alpha)^۲}{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}$$
$$\Rightarrow (۱ - \alpha)^۲((۷ - \alpha)^۲ + ۴) = (۷ - \alpha)^۲((۱ - \alpha)^۲ + ۲۵)$$
$$\Rightarrow (۱ - \alpha)^۲(۷ - \alpha)^۲ + ۴(۱ - \alpha)^۲ = (۷ - \alpha)^۲(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵(۷ - \alpha)^۲$$
$$\Rightarrow ۴(۱ - \alpha)^۲ = ۲۵(۷ - \alpha)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۲(۱ - \alpha) = \pm ۵(۷ - \alpha)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲ - ۲\alpha = ۳۵ - ۵\alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۳۳ \Rightarrow \alpha = ۱۱ \\ ۲ - ۲\alpha = -۳۵ + ۵\alpha \Rightarrow ۷\alpha = ۳۷ \Rightarrow \alpha = \frac{۳۷}{۷} \end{cases}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، $\alpha = ۱۱$ قابل‌قبول است.

.40

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V=a^{۲}h=۴\Rightarrow h=\frac{۴}{a^{۲}}$$

مقدار حلب برابر $۴ah+a^{۲}$ است:

$$S=۴ah+a^{۲}=\frac{۱۶}{a}+a^{۲}$$

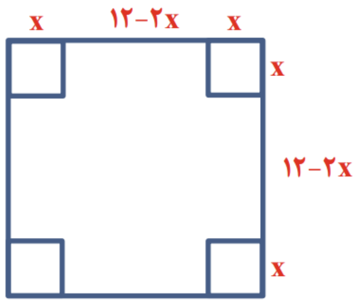
مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

$$S=\frac{۱۶}{a}+a^{۲}\Rightarrow S'=\frac{-۱۶}{a^{۲}}+۲a=۰\Rightarrow a=۲\Rightarrow h=۱$$

$$S=۸+۴=۱۲$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

.41



$$V(x)=x(۱۲-۲x)^{۲}\Rightarrow V'(x)=(۱۲-۲x)^{۲}-۲\times ۲x(۱۲-۲x)=۰\Rightarrow$$

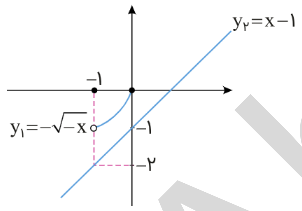
$$(۱۲-۲x)(۱۲-۲x-۴x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۶\\ \boxed{x=۲}\end{cases}$$

.42

$$y=-\sqrt{-x-[x^{۲}]}$$

$$-x-[x^{۲}]\geq ۰\Rightarrow -x\geq [x^{۲}]\Rightarrow D_f=[-۱,۰]$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & ;x\in(-۱,۰)\\ ۰ & ;x=۰,-۱\end{cases}$$



نقطهٔ $A(x,-\sqrt{-x})$ را روی $y_۱$ در نظر می‌گیریم:

$$A(x,-\sqrt{-x})\xrightarrow{x-y-۱=۰}AH=\frac{|x+\sqrt{-x}-۱|}{\sqrt{۱+۱}}\qquad(*)$$

$$\Rightarrow AH'=\frac{\left|۱+\frac{-۱}{۲\sqrt{-x}}\right|}{\sqrt{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲\sqrt{-x}}=۰\Rightarrow\sqrt{-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)}AH=\frac{\left|-\frac{۱}{۴}+\sqrt{\frac{۱}{۴}}-۱\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{\left|-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

.43

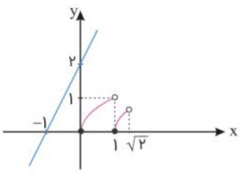
دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-[x^2]}$ به‌صورت $D_f=[0,\sqrt{2})$ است. داریم:

$$\begin{cases} 0\le x<1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \\ 1\le x<\sqrt{2} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1} \end{cases}$$

حال نمودار خط و منحنی را رسم می‌کنیم:

$y=2x+2$

x	0	-1
y	2	0



بنابراین به نظر می‌رسد کوتاه‌ترین فاصله مربوط به $0\le x<1$ است که منحنی به‌صورت $y=\sqrt{x}$ می‌باشد. نقطهٔ دلخواه روی منحنی به‌صورت $A(x,\sqrt{x})$ است، پس:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{5}}$$

قدر مطلق در $y'=0$ اثری ندارد، پس:

$$AH'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=0\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{16}$$

پس:

$$AH_{min}=\frac{\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}}\times\frac{15\sqrt{5}}{8\times5}=\frac{3\sqrt{5}}{8}$$