کاربرد مشتق

مشتق دوم و تقعر نمودار

به طور کلی برای تشخیص دو مورد دیگر، باید $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم:

الف) برای تشخیص تابع $f'(x)$ که در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

ب) برای تشخیص جهت تقعر $f(x)$.

مثال ۲۰: تقعر $f(x)=x^3-9x^2+7x+6$ در چه بازه‌ای رو به بالا است؟

پاسخ برای پیدا کردن جهت تقعر باید دو بار از $f(x)$ مشتق بگیریم. داریم:

$$f'(x)=3x^2-18x+7 \Rightarrow f''(x)=6x-18$$

حالا باید $f''(x)$ را تعیین علامت کنیم:

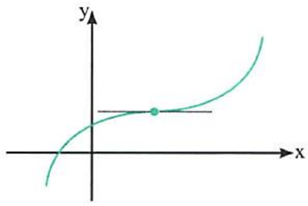
x		۳	
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

بازهٔ مورد نظر $(3,+\infty)$ است.

نقطه عطف

۱ نقطهٔ $(c,f(c))$ روی نمودار تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ مفروض است. اگر $f(x)$ در این نقطه خط مماس داشته باشد و جهت تقعر تابع در این نقطه تغییر کند، می‌گوییم $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف نمودار $y=f(x)$ است.

۲ خط مماس بر نمودار $y=f(x)$ در نقطهٔ عطف آن، در همان نقطه از نمودار می‌گذرد و مانند شکل زیر بخشی از نمودار بالای خط مماس و بخشی از آن پایین خط مماس قرار می‌گیرد.



۳ اگر $f''(x)$ همواره موجود باشد، آن‌گاه نقطهٔ عطف را به کمک تعیین علامت $f''(x)$ به‌دست می‌آوریم.

نکته مهم در توابع درجه سوم

فرض کنید $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشد. اگر $A(x_{min},y_{min})$ و $B(x_{max},y_{max})$، به ترتیب نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی $f(x)$ و $I(x_I,y_I)$ نقطهٔ عطف این تابع باشد، آن‌گاه رابطه‌های زیر برقرارند:

الف) $x_I=\dfrac{x_{min}+x_{max}}{2}$

ب) $y_I=\dfrac{y_{min}+y_{max}}{2}$

رسم نمودار

اولین نکته دربارهٔ نمودارها، توجه به مجانب‌ها، به خصوص مجانب قائم است. پیشنهاد می‌کنیم درسنامهٔ مجانب‌ها را در فصل حد و پیوستگی مرور کنید. مثال زیر یک نمونه از چنین مسائلی است.

۲ دومین نکتهٔ مهم دربارهٔ نمودارها، توجه به ریشه‌ها، به خصوص ریشه‌های مضاعف است. یادآوری می‌کنیم که اگر $x=k$ ریشهٔ مضاعف تابع چندجمله‌ای یا گویای $f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ حتماً عاملی به صورت $A(x-k)^2$ در صورت دارد.

۳ سومین نکتهٔ مهم در نمودارها، توجه به قله‌ها (ماکزیمم نسبی) و دره‌ها (مینیمم نسبی) است. دربارهٔ قله‌ها و دره‌ها دو نکتهٔ مهم وجود دارد:

الف) مشتق تابع در قله‌ها و دره‌ها برابر صفر است.

ب) اگر تابع کسری به فرم $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد و طول نقطهٔ اکسترمم نسبی مثلاً $x=c$ باشد، آن‌گاه:

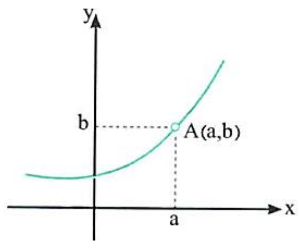
$$y=\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۴ چهارمین نکتهٔ مهم دربارهٔ نمودارها، توجه به نقطهٔ عطف است. معمولاً نقطهٔ عطف را روی نمودار علامت می‌زنند. در هر حال اگر تابع، مشتق دوم داشته باشد، در نقطهٔ عطف مقدار مشتق دوم برابر صفر است.

۵ نکتهٔ پنجم دربارهٔ نمودارها، توجه به نقاط افتادگی است. نقطهٔ افتادگی، نقطه‌ای است مانند نقطهٔ A در نمودار زیر. وجود این نقطه اطلاعات زیر را در مورد توابع به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به ما می‌دهد:

الف) $f(a)=g(a)=0$

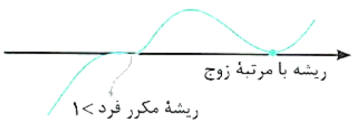
ب) $b=\frac{f'(a)}{g'(a)}$



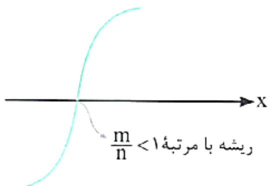
چند نکته تکمیلی راجع به نمودار ها

۱ اگر $x=x_0$ ریشه‌ای از مرتبهٔ زوج باشد، نمودار در نقطه‌ای به طول $x=x_0$، بر محور xها مماس می‌شود.

۲ اگر $x=x_0$ ریشه‌ای مکرر از مرتبهٔ فرد بیشتر از یک باشد، آن‌گاه نمودار با یک انحناء خوابیده محور xها را قطع می‌کند و از آن عبور می‌کند.



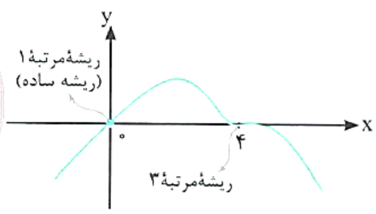
۳ اگر $x=x_0$ ریشه‌ای از مرتبهٔ $1<\frac{m}{n}$ باشد که mn فرد است، آن‌گاه نمودار با یک انحناء ایستاده محور xها را قطع می‌کند. (در این حالت $x=x_0$ نقطهٔ عطف است.)



◄ برای نمونه: به نمودار توابع زیر دقت کنید:

الف) $y=x(4-x)^3$

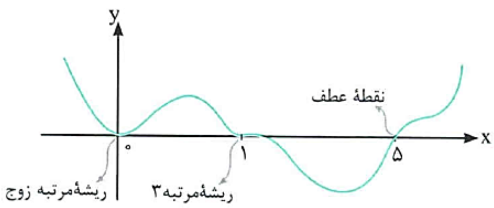
اولین نکته‌ای که در هر نمودار باید دقت کنید، علامت آن وقتی $x\to\infty$ است، در این تابع به وضوح $\lim_{x\to\infty} y=-\infty$ است. پس داریم:



ب) $y=x^2(x-1)^3(\sqrt[3]{x-5})$

در این مورد داریم: $\lim_{x\to\infty} y=+\infty$

بنابراین:



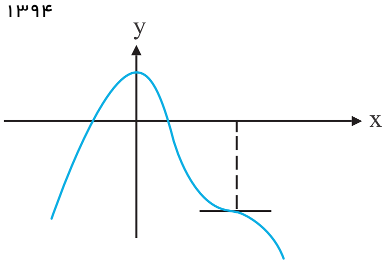
۱. کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۱ - \cos^۲ x - \sin x$ کدام است؟ ۱۳۸۷

(۱) -۱ (۲) $-\frac{۱}{۲}$ (۳) $-\frac{۱}{۴}$ (۴) صفر

۲. طول اکسترمم تابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{۲ + \cos x}$ در فاصله $(۰, \pi)$ کدام است؟ ۱۳۸۳

(۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ (۲) $\frac{\pi}{۳}$ (۳) $\frac{\pi}{۲}$ (۴) $\frac{\pi}{۴}$

۳. شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ + ax^۲ + b$ است، a کدام است؟ ۱۳۹۴

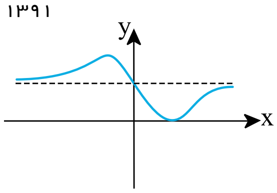


(۱) -۱۸
(۲) -۱۵
(۳) -۱۲
(۴) -۹

۴. نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos^۲ x - \cos x$ روی بازهٔ $\left(\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right)$ چگونه‌اند؟ ۱۳۸۵

(۱) یک نقطه ماکسیمم - یک نقطه مینیمم (۲) یک نقطه ماکسیمم - دو نقطه مینیمم (۳) دو نقطه ماکسیمم - یک نقطه مینیمم (۴) دو نقطه ماکسیمم - دو نقطه مینیمم

۵. شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \dfrac{ax^۲ + bx + ۲}{x^۲ + ۱}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟ ۱۳۹۱

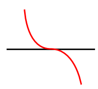
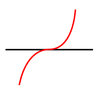
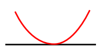
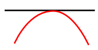


(۱) $(۱, -۲)$ (۲) $(۱, ۲)$
(۳) $(۲, -۴)$ (۴) $(۲, ۴)$

۶. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟ ۱۳۸۵

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) بی‌شمار

۷. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۶}x^۳ - x + \sin x$ در همسایگی $x = ۰$ چگونه است؟ ۱۳۸۶

(۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

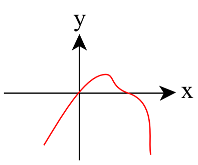
۸. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin^۲ x - ۲\sin x\ ;\ x \in [۰, ۲\pi]$ ، در کدام بازه صعودی است و تقعر آن رو به پایین است؟ ۱۳۹۶

(۱) $(\frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲})$ (۲) $(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۱۱\pi}{۶})$ (۳) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶})$ (۴) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۷\pi}{۶})$

۹. طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (۵ - x)\sqrt[۳]{x^۲}$، کدام است؟ ۱۳۹۵

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰. ضابطهٔ تابع نمودار مقابل کدام است؟ ۱۳۸۷

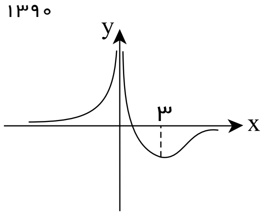


(۱) $y = x(۱ - x)^۳$ (۲) $y = x(x - ۱)^۳$
(۳) $y = x(۱ - x^۳)$ (۴) $y = x(x^۳ - ۱)$

۱۱. تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|\sin x|$ بر بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ کدام است؟ ۱۳۸۲

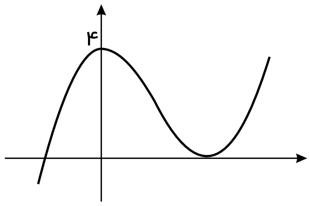
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲. شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{ax+۳}{x^۲+bx}$ است، دوتایی (a,b) کدام است؟ ۱۳۹۰



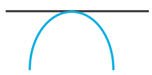
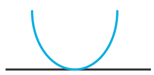
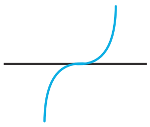
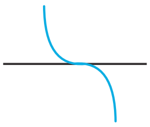
۱) $(-۲$ و $-۲)$ ۲) $(-۲$ و $۰)$
۳) $(۲$ و $۰)$ ۴) $(۲$ و $۲)$

۱۳. نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ به‌صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟ ۱۴۰۱

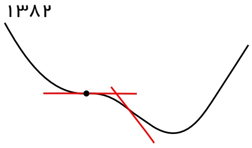


۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۱۴. نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sin ۲x\ \cos x$ در همسایگی نقطه بحرانی روی بازه $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ به کدام صورت است؟ ۱۳۸۱

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۵. شکل مقابل نمودار تابع f است. مقادیر اکسترمم نسبی تابع مشتق f از راست به چپ چگونه است؟ ۱۳۸۲

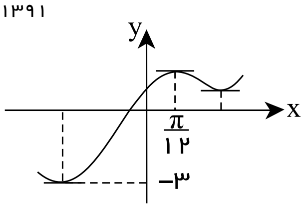


۱) مینیمم مثبت - ماکزیمم مثبت ۲) مینیمم منفی - ماکزیمم منفی
۳) مینیمم صفر - ماکزیمم مثبت ۴) مینیمم منفی - ماکزیمم صفر

۱۶. مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y=x\left|x^۲-۴x\right|$، کدام است؟ ۱۳۹۲

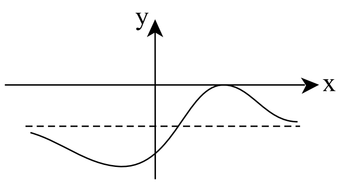
۱) $\{\frac{۴}{۳}\}$ ۲) $\{۰,\frac{۴}{۳},۴\}$ ۳) $\{\frac{۴}{۳},۴\}$ ۴) $\{۰,\frac{۴}{۳}\}$

۱۷. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos ۴x+b\sin ۲x$ است، b کدام است؟ ۱۳۹۱



۱) ۲ ۲) -۲
۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۱۸. شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{ax^۲+۴x-۴}{x^۲+b}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟ ۱۳۸۱

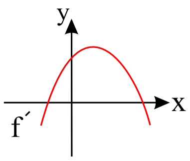


۱) $(-۲,۵)$ ۲) $(-۱,۳)$
۳) $(-۱,۵)$ ۴) $(۱,۳)$

۱۹. اگر T دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $y=\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}$ باشد این منحنی روی بازه $(۰,T)$ چند نقطه عطف دارد؟ ۱۳۸۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد عطف

۲۰. نمودار f' (مشتق تابع f) به‌صورت شکل مقابل است. تابع f از نظر نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و نقطه عطف چگونه است؟ ۱۳۸۴



۱) فقط یک ماکسیمم در سمت راست محور yها
۲) یک ماکسیمم و یک مینیمم و یک نقطه عطف در سمت راست محور yها
۳) یک مینیمم در سمت چپ محور yها و یک ماکسیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها
۴) یک ماکسیمم در سمت چپ محور yها و یک مینیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

۲۱. ماکسیمم تابع با ضابطهٔ $f(x) = -|x|\cos x$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ کدام است؟ ۱۳۸۶

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\cos ۱$ ۴) ۱

۲۲. تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \dfrac{x^۲+۹}{x^۲+۱۲}$ در بازه (a,b) رو به بالا است، بیشترین مقدار b-a کدام است؟ ۱۳۸۸

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲

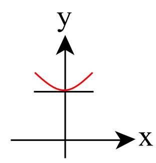
۲۳. مجموعهٔ طول نقاطی که در آنها تقعر منحنی به معادله $y = \dfrac{-۲}{x^۲+۳}$، رو به بالا است، کدام است؟ ۱۳۹۰

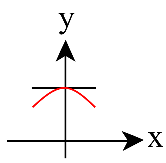
۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ۴) $(-\infty,-\sqrt{۳})\cup(\sqrt{۳},+\infty)$

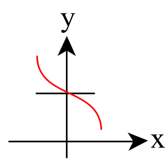
۲۴. مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x\ ;\ ۰ \le x \le ۲\pi$ رو به بالا باشد در کدام بازه است؟ ۱۳۹۰

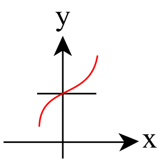
۱) $(۰,\frac{۳\pi}{۴})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴})$ ۳) $(\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴})$

۲۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲ + \sin x - x\cos x$ در همسایگی نقطه $x = ۰$ به کدام شکل است؟ ۱۳۸۳

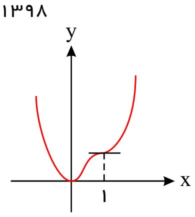
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۶. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx$ است. a کدام است؟ ۱۳۹۸

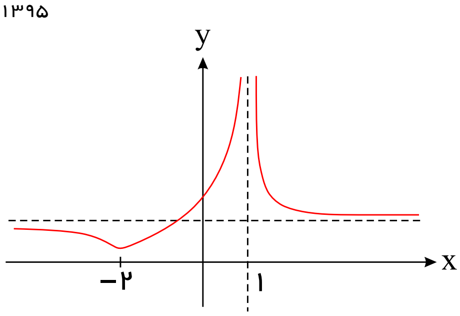


۱) -۸ ۲) -۷
۳) -۵ ۴) -۴

۲۷. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos^۲ x - ۲\cos x; x \in [۰,۲\pi]$، در کدام بازه، نزولی است و تقعر آن رو به پایین است؟ ۱۳۹۶

۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$ ۲) $(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳},\pi)$ ۴) $(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲})$

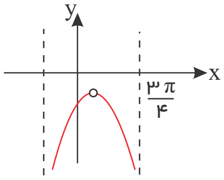
۲۸. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x^۲+a}{x^۲+bx+c}$ است. a کدام است؟ ۱۳۹۵



۱) -۲
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۳۹۳

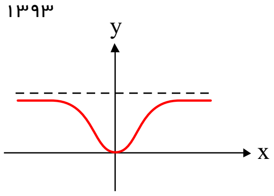
۲۹. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\dfrac{a\sin x-\cos x}{b+\cos 2x}$ است. a کدام است؟

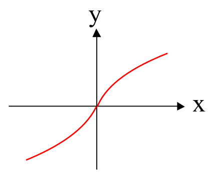
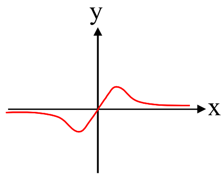
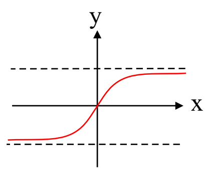
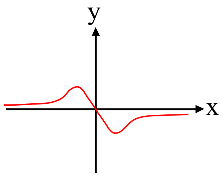


۱) $-\sqrt{2}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

۱۳۹۳

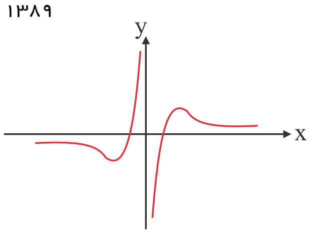
۳۰. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۳۸۹

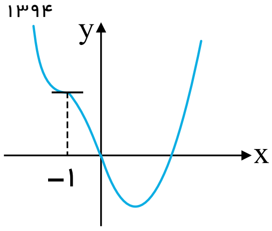
۳۱. شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^2+ax-3}{x^3+b}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(0,0)$
۲) $(0,1)$
۳) $(1,0)$
۴) $(2,0)$

۱۳۹۴

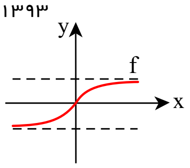
۳۲. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx$ است، b کدام است؟

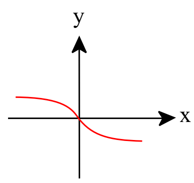
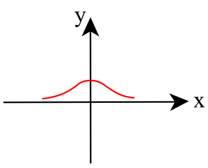
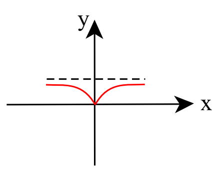
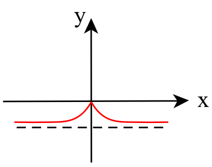


۱) -11
۲) -10
۳) -9
۴) -8

۱۳۹۳

۳۳. شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$، به کدام صورت است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

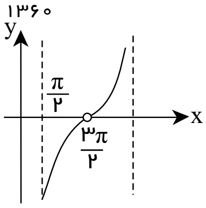
۱۳۸۷

۳۴. تقعر نمودار تابع با ضابطه $y=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه (a,b) رو به پایین است، بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ∞

۱۳۶۰

۳۵. شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1+a\sin x}{b+\cos x}$ است، $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟



۱) $1-\sqrt{3}$
۲) $2-\sqrt{3}$
۳) $1+\sqrt{3}$
۴) $2+\sqrt{3}$

۳۶. تقعر نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x+\frac{x^۲}{\pi}$ وقتی $۰\leq x\leq\frac{\pi}{۲}$ به کدام صورت است؟ ۱۳۹۱

۱) رو به پایین ۲) رو به بالا ۳) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا ۴) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین

۳۷. نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos ۲x-۲\cos x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ چگونه است؟ ۱۳۸۵

۱) فاقد ماکسیمم - یک نقطهٔ مینیمم ۲) یک نقطهٔ ماکسیمم - یک نقطهٔ مینیمم ۳) یک نقطهٔ ماکسیمم- دو نقطهٔ مینیمم ۴) دو نقطهٔ ماکسیمم- یک نقطهٔ مینیمم

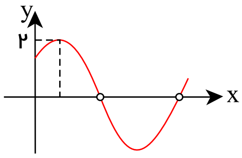
۳۸. طول نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{۳-x^۲}{۲} & ;\ x<۱\\ \frac{۱}{x} & ;\ x\geq ۱\end{cases}$، در صورت وجود، کدام است؟ ۱۳۸۹

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد عطف

۳۹. منحنی به معادله $y=\frac{x+۱}{۱-۲x}$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصلهٔ مرکز تقارن این منحنی از وتر AB، کدام است؟ ۱۳۸۹

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۴۰. شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{a\sin ۲x+b}{\sin x+\cos x}$، در یک دوره تناوب است. a کدام است؟ ۱۳۹۳



۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۴۱. فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+۵$ باشند. زاویهٔ بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

۱۴۰۰ ۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۴۲. به‌ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطه عطف منحنی $y=kx^۳+(k+۱)x^۲$ در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد؟ ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیش از ۲ ۴) صفر

۴۳. به‌ازای چند مقدار صحیح k، نقطه عطف منحنی $y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲$ در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟ ۱۴۰۲

۱) بیش از ۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخنامه تشریحی

۱ . گزینه ۳ روش اول:

$$y = 1 - \cos^2 x - \sin x \to y = \sin^2 x - \sin x \xrightarrow{\sin x = A} y = A^2 - A \ , \quad A \in [-1, 1]$$

حال کافی است از تابع مشتق گرفته و طول نقاط بحرانی را به دست آورده و سپس مقدار تابع را به‌ازای طول نقاط بحرانی به دست آوریم.

$$y' = 2A - 1 = 0 \to A = \frac{1}{2} \to \begin{cases} y(-1) = 1 + 1 = 2 \\ y(1) = 1 - 1 = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \to \text{مطلق } Min \end{cases}$$

روش دوم:

$$y = 1 - \cos^2 x - \sin x = \sin^2 x - \sin x = (\sin x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

این عبارت وقتی کمترین مقدار را به خود می‌گیرد که عبارت $(\sin x - \frac{1}{2})^2$ که مربع کامل است کمترین مقدار یعنی صفر شود، پس:

$$y_{\text{مطلق}Min} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

۲ . گزینه ۱ کافی است ریشهٔ $f'(x)$ را به دست آوریم. درنتیجه خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(2 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{2\pi}{3}$$

f' در $x = \frac{2\pi}{3}$ تغییر علامت می‌دهد و این نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

۳ . گزینه ۱ با توجه به شکل در نقطه عطف خط مماس بر منحنی افقی است؛ یعنی طول نقطه عطف هم ریشه مشتق اول است و هم ریشه مشتق دوم، بنابراین ریشه مضاعف مشتق اول محسوب می‌شود.

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 2ax = -2x \cdot (2x^2 - 12x - a)$$

معادله $f' = 0$ یک ریشه ساده $x = 0$ دارد و یک ریشه مضاعف در معادله $2x^2 - 12x - a = 0$ دارد، بنابراین:

$$2x^2 - 12x - a = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} (-12)^2 - 4(2) \cdot (-a) = 0$$
$$144 + 8a = 0 \ \to \ a = -18$$

۴ . گزینه ۴

ابتدا ریشه‌های $f'(x)$ را به دست می‌آوریم؛ لذا داریم:

$$f'(x) = -2\cos x \ \sin x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(-2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi, 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$2\pi - \frac{\pi}{3}$		2π		$2\pi + \frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

بنابراین تابع در بازهٔ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۵ . گزینه ۳ تابع دارای مجانب افقی $y = a$ است و منحنی و خط مجانب افقی یکدیگر را روی محور yها قطع می‌کنند. طبق شکل نقطهٔ $A\left|_a^0\right.$ روی تابع قرار دارد.

$$A = (0, a) \in f(x) \Rightarrow a = \frac{0 + 0 + 2}{0 + 1} \Rightarrow a = 2$$

از طرفی تابع بر محور xها مماس است پس Δ صورت صفر است.

$$f(x) = \frac{2x^2 + bx + 2}{x^2 + 1} \Rightarrow 2x^2 + bx + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} b^2 - 4(4) = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

طول نقطهٔ تماس مثبت است، پس ریشهٔ مضاعف صورت مثبت است.

$$2x^2 + bx + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} x = -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{2 \times 2} = -\frac{b}{4} > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow b = -4$$

۶ . گزینه ۴ با توجه به بازهٔ داده‌شده تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم به‌طوری که جزء صحیح حذف شود:

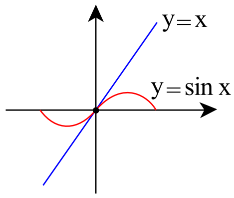
$$f(x) = \begin{cases} -\sin \pi x & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ \sin \pi x & 1 \le x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

در بازهٔ $[0 \ , \ 1)$ نمودار تابع f ثابت است و چون در تمام این بازه مقدار مشتق صفر است، بنابراین بی‌شمار نقطهٔ بحرانی دارد.

۷ . گزینه ۲ جهت تقعر تابع را در اطراف نقطه $x=0$ بررسی می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-x+\sin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^2-1+\cos x \xrightarrow{x=0} f'(0)=0-1+1=0$$

$$f''(x)=x-\sin x \Rightarrow \begin{cases} x<0: x<\sin x \Rightarrow f''(x)<0 \\ x>0: x>\sin x \Rightarrow f''(x)>0 \end{cases}$$



درنتیجه تقعر تابع $f(x)$ در $x=0$، ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا می‌باشد، پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

۸ . گزینه ۱ f صعودی است هرگاه $f'>0$ و جهت تقعر f رو به پایین است هرگاه $f''<0$ باشد.

$$f(x)=\sin^2 x-2\sin x \to \begin{cases} f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=\sin 2x-2\cos x \\ f''(x)=2\cos 2x+2\sin x \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \to 2\cos x(\sin x-1)=0 \to \begin{cases} \cos x=0 \to x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \\ \sin x=1 \to x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

→ در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ تابع f صعودی است. (I)

$$f''(x)=0 \to 2\cos 2x+2\sin x=0 \to 2(1-2\sin^2 x+\sin x)=0$$

$$\to -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x=1 \to x=\frac{\pi}{2} \quad \text{ریشه مضاعف} \\ \sin x=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \to \begin{cases} x=\frac{7\pi}{6} \\ x=\frac{11\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از جدول متوجه می‌شویم در بازه‌های $(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$ تقعر نمودار f رو به پایین است. (II)

$$\begin{cases} f'>0 \\ f''<0 \end{cases} \xrightarrow{(I)\cap(II)} x\in(\frac{7\pi}{6}\ ,\ \frac{3\pi}{2})$$

۹ . گزینه ۱

$$y=(5-x)x^{\frac{2}{3}} \to y=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$$

$$y'=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \to y''=-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y''=\frac{-10-10x}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$-10-10x=0 \to x=-1,\quad 9x\sqrt[3]{x}=0 \to x=0$$

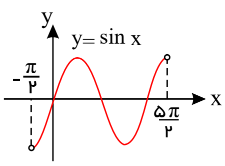
توجه کنید که $x=0$ نقطه بازگشتی است، پس $x=-1$ نقطهٔ عطف است.

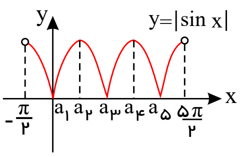
۱۰ . گزینه ۱ با توجه به شکل وقتی $x\to\pm\infty$، داریم $f(x)\to-\infty$؛ بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است. از طرفی تابع گزینهٔ (۳) یعنی $y=x(1-x^3)=x-x^4$ فاقد نقطهٔ عطف است زیرا $y''=-12x^2\le 0$ و درنتیجه تقعر این تابع همواره رو به پایین بوده و فاقد نقطهٔ عطف است. پس گزینهٔ (۳) نمی‌تواند پاسخ باشد و گزینهٔ (۱) جواب صحیح است.

۱۱ . گزینه ۴

راه اول: با رسم شکل، مشاهده می‌شود نقاط a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 نقاط بحرانی هستند.

تابع در نقاط a_5, a_3, a_1 مشتق‌ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط a_4, a_2 برابر صفر است.





راه دوم: در توابع به فرم $y=|f(x)|$ که در آنها $f(x)$ مشتق‌پذیر است، ریشه‌های قدر مطلق و ریشه‌های مشتق آن نقاط بحرانی تابع هستند.

$$y=|\sin x|=|f(x)|$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \to x=0,\pi,2\pi \\ f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0 \to x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ۵ نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۲ . گزینه ۲ از آنجا که $x=0$ تنها مجانب قائم نمودار است؛ درنتیجه مخرج فقط ریشه مضاعف $x=0$ دارد، لذا $b=0$. از طرفی در نقطه $x=3$ تابع مینیمم نسبی دارد، لذا $f'(3)=0$.
درنتیجه داریم:

$$f(x)=\frac{ax+3}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{a(x)^2-2x(ax+3)}{x^4}$$

$$\xrightarrow{x=3} f'(3)=\frac{9a-6(3a+3)}{3^4}=0 \Rightarrow -9a-18=0 \Rightarrow a=-2$$

۱۳ . گزینه ۲ نقطه $A(0,4)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ است، پس داریم:

$$f(0)=4 \Rightarrow c=4 \Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow 0+0+b=0 \Rightarrow b=0$$

$$f(x)=x^3+ax^2+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x+2a=0 \Rightarrow x=-\frac{2a}{3} \end{cases}$$

$x=-\frac{2a}{3}$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است که در این نقطه مقدار تابع نیز صفر است.

$$f(-\frac{2a}{3})=0 \Rightarrow (-\frac{2a}{3})^3+a(-\frac{2a}{3})^2+4=0 \Rightarrow -\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27}=-4 \Rightarrow a^3=-27$$

$a=-3 \Rightarrow$ طول نقطه مینیمم نسبی $x=-\frac{2a}{3}=\frac{-2(-3)}{3}=2$

۱۴ . گزینه ۱

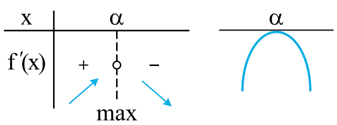
روش اول:

$$f(x)=\sin 2x \cdot \cos x \qquad [0,\frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x)=2\cos 2x\cos x-\sin x\sin 2x=2\cos x(\cos^2 x-3\sin^2 x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ \tan x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \xrightarrow{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \tan x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\tan\alpha$$

x		α	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
	$\nearrow$	max	$\searrow$



روش دوم:

ابتدا و انتهای منحنی هم‌سطح است و روی محور xها قرار دارد، بنابراین گزینه ۱ یا ۲ صحیح است. $\Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

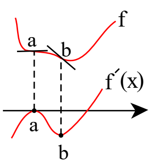
$$f(\frac{\pi}{4})=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$

نمودار f در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ بالای محور xها قرار دارد.

۱۵ . گزینه ۴ به کمک نمودار تابع $f(x)$، نمودار $f'(x)$ را رسم می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

مشاهده می‌شود نقطه a ماکزیمم نسبی تابع (x) است که مقدارش صفر است و همچنین نقطه b مینیمم نسبی تابع $f'(x)$ است که مقدارش منفی می‌باشد.

توجه: در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا باشد، منحنی f' در آن بازه صعودی رسم می‌شود و در هر فاصله‌ای که تقعر f نزولی باشد، منحنی f' نزولی رسم می‌شود.



۱۶ . گزینه ۴ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس دو بار مشتق می‌گیریم:

$$y=x\left|x^{۲}-۴x\right|=\begin{cases}x^{۳}-۴x^{۲} & ;\ x<۰,x>۴\\ -x^{۳}+۴x^{۲} & ;\ ۰\leq x\leq ۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}۳x^{۲}-۸x & ;\ x<۰,x>۴\\ -۳x^{۲}+۸x & ;\ ۰\leq x<۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow y''=\begin{cases}۶x-۸ & ;\ x<۰,x>۴\\ -۶x+۸ & ;\ ۰<x<۴\end{cases}$$

مشتق دوم به‌ازای $x=\frac{۴}{۳}$ ⇐ $۶x-۸=۰$ صفر است و حول آن تغییر علامت می‌دهد. همچنین مشتق دوم در $x=۰$ تعریف نشده ولی مماس در آن وجود دارد و مشتق دوم حول آن تغییر علامت می‌دهد. $(f''_{+}(۰)=۸\ ,\ f''_{-}(۰)=-۸)$، درنتیجه $x=۰$ نیز نقطه عطف به شمار می‌آید.

توجه داشته باشید که در $x=۴$ مشتق چپ و مشتق راست برابر نیستند پس $x=۴$ زاویه‌دار است پس نمی‌تواند عطف باشد.

۱۷ . گزینه ۱ از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=-۴a\sin ۴x+۲b\cos ۲x\ \ (*)$$

با توجه به نمودار، مقدار مشتق در $x=\frac{\pi}{۱۲}$ برابر صفر است، زیرا خط مماس بر تابع در این نقطه موازی محور xهاست.

$$f'(\frac{\pi}{۱۲})=-۴a\sin\frac{\pi}{۳}+۲b\cos\frac{\pi}{۶}=۰\Rightarrow -۴a(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+۲b(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۰\Rightarrow \sqrt{۳}(-۲a+b)=۰$$

$$\Rightarrow b=۲a\ \xrightarrow{(*)}\ f'(x)=-۴a\sin ۴x+۴a\cos ۲x$$

حال برای یافتن طول نقاط اکسترمم نسبی، مشتق تابع f را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sin ۴x=\cos ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=\cos ۲x\Rightarrow \cos ۲x\cdot(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ \text{یا}\\ \sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ ۲x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

با توجه به نمودار، مقدار تابع در اولین اکسترمم نسبی با طول منفی برابر -۳ است. طول این اکسترمم با توجه به مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده $x=-\frac{\pi}{۴}$ است، پس:

$$f(\frac{-\pi}{۴})=-۳\Rightarrow a\cos(-\pi)+b\sin(\frac{-\pi}{۲})=-۳\Rightarrow -a-b=-۳\ \xrightarrow{b=۲a}\ -۳a=-۳\Rightarrow a=۱\Rightarrow b=۲(۱)=۲$$

۱۸ . گزینه ۲ از آنجا که تابع بر محور طول‌ها مماس است، لذا $y=۰$ ریشه مضاعف دارد. لذا داریم:

$$f(x)=\frac{ax^{۲}+۴x-۴}{x^{۲}+b}\Rightarrow ax^{۲}+۴x-۴=۰\xrightarrow{\Delta=۰}۱۶-۴(-۴a)=۰\Rightarrow ۱۶+۱۶a=۰\Rightarrow a=-۱$$

از آنجا که $y=-۱$ مجانب افقی تابع است، لذا عرض از مبدأ منحنی کمتر از (-۱) خواهد بود، لذا خواهیم داشت:

$$\text{عرض از مبدأ}\ \xrightarrow{x=۰}\ f(۰)=\frac{-۴}{b}<-۱\Rightarrow \frac{۴}{b}>۱\Rightarrow ۰<\frac{b}{۴}<۱\Rightarrow ۰<b<۴$$

از میان گزینه‌ها فقط گزینه ۲ در شرایط ارائه‌شده صدق می‌کند.

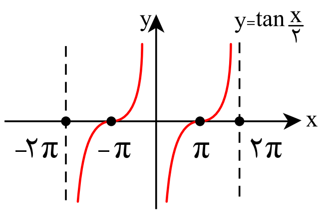
۱۹ . گزینه ۱ یادآوری: $\boxed{\begin{array}{c}۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha\\ \sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\end{array}}$

یادآوری: دوره تناوب اصلی تابع $f(x)=\tan(ax)$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است $(a\neq ۰)$.

ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم، لذا خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۲\sin(\frac{x}{۲})\cos(\frac{x}{۲})}{۲\cos^{۲}(\frac{x}{۲})}=\frac{\sin(\frac{x}{۲})}{\cos(\frac{x}{۲})}=\tan(\frac{x}{۲})\Rightarrow T=\frac{\pi}{\left|\frac{۱}{۲}\right|}=۲\pi$$

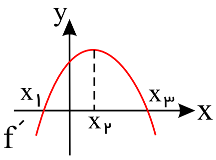
نمودار تابع $f(x)=\tan(\frac{x}{۲})$ به کمک انقباض نمودار تابع $y=\tan x$ با ضریب $\frac{۱}{۲}$، مطابق شکل روبه رو است. درنتیجه تابع در هر دورهٔ تناوب، یک نقطه عطف دارد.



۲۰ . گزینه ۳ اگر f یک منحنی پیوسته باشد، آنگاه محل برخورد منحنی $f'(x)$ با محور xها نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است. اگر منحنی f' از بالا به پایین محور xها را قطع کند، این نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است و اگر از پایین به بالا محور xها را قطع کند، این نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است. اگر در نقطه‌ای منحنی $f'(x)$ در دو سوی محور xها باشد، آن نقطه نیز اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است. اگر منحنی f' بر محور xها مماس باشد، آن نقطه، عطف افقی منحنی $f(x)$ است و نیز نقطهٔ اکسترمم نسبی منحنی f' نقطه عطف تابع $f(x)$ است.

در این شکل، تابع f' دو بار محور xها را، یکی از بالا به پایین و دیگری از پایین به بالا قطع می‌کند. بنابراین یک مینیمم نسبی در سمت چپ و یک ماکزیمم در سمت راست محور yها قرار دارد و نقطه $x_۲$ که اکسترمم منحنی $f'(x)$ است، نقطهٔ عطف منحنی $f(x)$ است.

به بیان دیگر: همان گونه که می‌دانیم $f''(x)$ شیب نمودار $f'(x)$ است. در نقطه $x = x_۲$ ، $f''(x_۲) = ۰$ بوده و همچنین شیب نمودار $f'(x)$ نیز تغییر علامت داده است. لذا $x = x_۲$ نقطه عطف تابع است.



در نقطه $x = x_۱$ مشتق از منحنی به نسبت تغییر علامت داده درنتیجه بنا بر آزمون مشتق اول، نقطه $x = x_۱$ مینیمم نسبی تابع است. به روش مشابه، مشتق تابع در نقطه $x = x_۳$ از مثبت به منفی تغییر علامت داده و درنتیجه ماکسیمم تابع به‌شمار می‌رود.

۲۱ . گزینه ۱ توجه: عبارت‌هایی که نامثبت هستند (منفی و صفر)، بیشترین مقدار آنها صفر است.

از آنجا که $[-۱,۱] \subset (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ بوده و در این بازه $\cos x > ۰$ ، بنابراین از $-|x| \leq ۰$ نتیجه می‌گیریم:

$$-|x|\cos x \leq ۰ \Rightarrow f(x) \leq ۰ \Rightarrow \max(f(x)) = ۰$$

۲۲ . گزینه ۲

مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^۲+۹}{x^۲+۱۲} = ۱ - \frac{۳}{x^۲+۱۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۶x}{(x^۲+۱۲)^۲}$$
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۶(x^۲+۱۲)^۲ - ۶x(۲x)۲(x^۲+۱۲)}{(x^۲+۱۲)^۴} = \frac{۶(x^۲+۱۲) - ۲۴x^۲}{(x^۲+۱۲)^۳}$$
$$= \frac{۷۲ - ۱۸x^۲}{(x^۲+۱۲)^۳} = \frac{۱۸(۴-x^۲)}{(x^۲+۱۲)^۳} \xrightarrow{f''(x)>۰} ۴ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۴$$
$$\Rightarrow -۲ < x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۲ - (-۲) = ۴$$

۲۳ . گزینه ۱

$$y' = \frac{۴x}{(x^۲+۳)^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۴(x^۲+۳)^۲ - ۲(۲x)(x^۲+۳)(۴x)}{(x^۲+۳)^۴} = \frac{-۱۲x^۲+۱۲}{(x^۲+۳)^۳}$$
$$y'' > ۰ \Rightarrow -۱۲x^۲ + ۱۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

۲۴ . گزینه ۳

مشتق دوم تابع را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x \Rightarrow f'(x) = ۲x - ۲\sqrt{۲}\sin x \Rightarrow f''(x) = ۲ - ۲\sqrt{۲}\cos x$$
$$f''(x) = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} \xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x = \frac{\pi}{۴}, x = \frac{۷\pi}{۴}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		۲π
f''		-	۰	+	۰	-	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

در این بازه تقعر منحنی رو به بالاست. $\Rightarrow x \in (\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$

۲۵ . گزینه ۴ راه‌حل اول: جهت تقعر تابع را در نقطه $x = ۰$ بررسی می‌کنیم؛ لذا داریم:

$$f(x) = ۲ + \sin x - x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x \Rightarrow f'(۰) = ۰$$

$$f''(x) = \sin x + x\cos x = \cos x(x + \tan x) \Rightarrow \begin{cases} x \to ۰^+ \Rightarrow x + \tan x > ۰ \Rightarrow f''(x) > ۰ & \text{تقعر رو به بالا} \\ x \to ۰^- \Rightarrow x + \tan x < ۰ \Rightarrow f''(x) < ۰ & \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

درنتیجه تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ ابتدا تقعر رو به پایین بوده و سپس رو به بالا است؛ بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

راه‌حل دوم:

$$f(x) = ۲ + \sin x - x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x \Rightarrow f'(۰) = ۰$$

چون $\sin x$ در اطراف نقطه صفر، هم ارز با x است پس $\sin x \simeq x$ و $f'(x) = x \times x = x^۲$، پس مشتق اول همواره مثبت است و تابع صعودی است پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۶ . گزینه ۱ با توجه به شکل، نقطهٔ $x = ۰$ مینیمم نسبی تابع است، پس ریشهٔ مشتق است. همچنین تابع در $x = ۱$ خط مماس افقی در نقطهٔ عطف دارد، پس $x = ۱$ هم ریشهٔ مشتق اول و هم ریشهٔ مشتق دوم است.

$$f(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx$$
$$f''(x) = ۳۶x^۲ + ۶ax + ۲b f'(x) = ۱۲x^۳ + ۳ax^۲ + ۲bx + c \quad ,$$
$$f'(۰) = ۰ \Rightarrow c = ۰$$

$\Rightarrow ۳a+۲b=-۱۲ \Rightarrow ۱۲+۳a+۲b=۰ f'(۱)=۰$

$f''(۱)=۰ \Rightarrow ۳۶+۶a+۲b=۰ \Rightarrow ۳a+b=-۱۸$

$\Rightarrow \ a=-۸$

۲۷ . گزینه ۲ باید ببینیم که در چه فاصله‌ای $f'\leq ۰ \quad , \quad f''\geq ۰$ است.

$f(x)=\cos^۲ x-۲\cos x \rightarrow f'(x)=-۲\sin x\cdot\cos x+۲\sin x=۰$

$۲\sin x\cdot(-\cos x+۱)=۰ \rightarrow \sin x=۰ \rightarrow x=۰,\pi,۲\pi$

$-۱+\cos x=۰ \rightarrow \cos x=۱ \rightarrow x=۰,۲\pi$

x	۰		π		۲π
f'	۰	$+$	۰	$-$	۰
f		$\nearrow$		$\searrow$	

در بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ تابع نزولی است. $\rightarrow (I)$

برای بررسی تقعر منحنی f'' را تعیین علامت می‌کنیم.

$f'(x)=-\sin ۲x+۲\sin x \rightarrow f''(x)=-۲\cos ۲x+۲\cos x=۰$

$f''(x)=-۲(۲\cos^۲ x-۱)+۲\cos x=۰ \rightarrow f''(x)=-۴\cos^۲ x+۲\cos x+۲=۰$

$\cos x=۱ \rightarrow x=۰,۲\pi \quad , \quad \cos x=-\frac{۱}{۲} \rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}$

x	۰		$\frac{۲\pi}{۳}$		$\frac{۴\pi}{۳}$		۲π
f''	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

در بازهٔ $(۰,\frac{۲\pi}{۳})\cup(\frac{۴\pi}{۳},۲\pi)$ تقعر منحنی رو به بالا است. (II)

$I\cap II \Rightarrow (\pi,\frac{۴\pi}{۳})$

۲۸ . گزینه ۳ نکته: اگر $x=k$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، آنگاه:

$ax^۲+bx+c=a\cdot(x-k)^۲$

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ منحنی در اطراف $x=۱$ از هر دو طرف به $+\infty$ می‌رود، بنابراین $x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج تابع بوده و $x=-۲$ طول مینیمم نسبی تابع است.

$x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج است پس، مخرج به‌صورت $(x-۱)^۲$ می‌باشد. بنابراین:

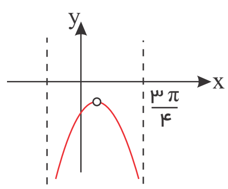
$$x^۲+bx+c=(x-۱)^۲ \rightarrow x^۲+bx+c=x^۲-۲x+۱ \rightarrow \begin{cases} b=-۲ \\ c=۱ \end{cases}$$

$x=-۲$ طول مینیمم نسبی تابع است، پس $f'(-۲)=۰$ است.

$$f(x)=\frac{x^۲+a}{x^۲-۲x+۱} \rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۲x+۱)-(۲x-۲)(x^۲+a)}{(x^۲-۲x+۱)^۲}$$

$$f'(-۲)=۰ \rightarrow -۴(۹)-(-۶)(۴+a)=۰ \rightarrow a=۲$$

۲۹ . گزینه ۲ چون $x=\frac{۳\pi}{۴}$ مجانب قائم تابع f است، پس ریشه مخرج آن است، یعنی:



$$(b+\cos ۲x) \xlongequal{x=\frac{۳\pi}{۴}} ۰ \Rightarrow b+\underbrace{\cos\frac{۳\pi}{۲}}_{۰}=۰ \Rightarrow b=۰$$

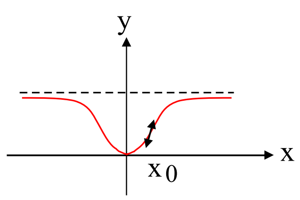
پس ضابطه تابع به‌صورت $f(x)=\dfrac{a\sin x-\cos x}{\cos ۲x}$ می‌شود.

ریشه‌های مخرج: $\quad ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴} \ , \ x=\frac{\pi}{۴}$

نمودار تابع f به‌ازای $x=\frac{\pi}{۴}$، تعریف نشده است (نقطه توخالی) و چون تابع در این نقطه حد دارد، پس صورت تابع f نیز باید به‌ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ صفر شود، یعنی:

$$(a\sin x-\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{۴}}=۰ \Rightarrow \frac{a\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰ \Rightarrow a=۱$$

۳۰ . گزینه ۲



نمودار تابع $f(x)$ شامل یک مجانب افقی، دو عطف و یک اکسترمم نسبی است و همواره مشتق‌پذیر است.

اگر $x<۰$ باشد، $f(x)$ نزولی است و f' در پایین محور xها واقع است.

و اگر $x>۰$ باشد، $f(x)$ صعودی است و f' در بالای محور xها قرار دارد.

توجه کنید که:

۱) وقتی $f(x)$ مجانب افقی دارد، آنگاه مجانب افقی $f'(x)$، خط $y=0$ است.

۲) نقاط عطف تابع $f(x)$، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f'(x)$ هستند.

۳) نقاط اکسترمم $f(x)$، ریشه‌های $f'(x)$ هستند.

۳۱ . گزینه ۱ با توجه به شکل داده‌شده، $x=0$ خط مجانب قائم است، بنابراین ریشه مخرج کسر است. داریم:

$$x^3+b=0 \xrightarrow{x=0} b=0$$

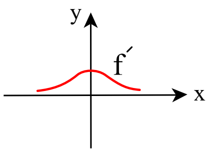
بنابراین ضابطه تابع f به‌صورت $f(x)=\dfrac{x^2+ax-3}{x^3}$ بازنویسی می‌شود. با دقت در شکل داده‌شده می‌توان گفت که f تابعی است که نسبت به نقطه $(0,0)$ متقارن است، پس باید $f(-x)=-f(x)$ باشد، بنابراین $a=0$ است.

۳۲ . گزینه ۱ با توجه به نمودار، تابع در $x=-1$ نقطهٔ عطف با مماس افقی دارد، پس $f'(-1)=0$ و $f''(-1)=0$ می است، بنابراین داریم:

$$f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx$$

$$\begin{cases} f'(x)=4x^3-3x^2+2ax+b \Rightarrow f'(-1)=-4-3-2a+b=0 \\ f''(x)=12x^2-6x+2a \Rightarrow f''(-1)=12+6+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b=7 \\ 2a+18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=-11 \end{cases}$$

۳۳ . گزینه ۲ وقتی $x\to\infty$ تابع $f(x)$ به دو خط افقی مجانب می‌شود و بنابراین شیب آن به صفر میل می‌کند، یعنی $y=0$ مجانب افقی تابع $f'(x)$ است.



$x=0$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ است، بنابراین طول اکسترمم نسبی تابع $f'(x)$ است. از طرفی در $x=0$، $f(x)$ صعودی است، پس $f'(x)$ در $x=0$ یک مقدار مثبت دارد. بنابراین نمودار $f'(x)$ شبیه گزینهٔ ۲ خواهد بود.

۳۴ . گزینه ۱

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{-5}{3}}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)=\frac{4}{9}\times\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}<0$$

x		-2		0	
$f''(x)$	$+$		$-$	ت.ن	$+$

درنتیجه تابع در بازه $(-2,0)$ تقعر رو به پایین دارد لذا برای به دست آوردن بیشترین مقدار $b-a$ باید $a=-2$ و $b=0$ باشد، درنتیجه $b-a=2$

۳۵ . گزینه ۴ از آنجا که $x=\dfrac{\pi}{2}$ مجانب قائم نمودار است، لذا ریشهٔ مخرج نیز هست، درنتیجه داریم:

$$b+\cos(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow b=0$$

در نقطه $x=\dfrac{3\pi}{2}$ تابع تعریف نمی‌شود، لذا این نقطه نیز ریشهٔ مخرج است، ولی از آنجا که تابع در این نقطه مجانب قائم ندارد، لذا ریشهٔ صورت نیز هست، پس:

$$1+a\sin(\frac{3\pi}{2})=0 \Rightarrow 1+a(-1)=0 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x} \Rightarrow f(\frac{\pi}{3})=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}$$

۳۶ . گزینه ۴

از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{\pi}x^2 \Rightarrow f'(x)=\cos x+\frac{2}{\pi}x \Rightarrow f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}=0 \Rightarrow \sin x=\frac{2}{\pi} \Rightarrow x=\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} x\in(0,\alpha):\sin x<\frac{2}{\pi} \Rightarrow f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}>0 \Rightarrow \text{تقعر رو به بالا} \\ x\in(\alpha,\frac{\pi}{2}):\sin x>\frac{2}{\pi} \Rightarrow f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}<0 \Rightarrow \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

درنتیجه ابتدا تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا بوده و سپس رو به پایین است.

۳۷ . گزینه ۳

با استفاده از آزمون مشتق اول وضعیت نقاط اکسترمم تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=\cos 2x-2\cos x \Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x=0$$

$$\Rightarrow -4\sin x\cos x+2\sin x=0 \Rightarrow 2\sin x(-2\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi\,(k\in\mathbb{Z}) \xrightarrow{x\in[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]} x = 0 \\ -2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z}) \xrightarrow{x\in[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]} x = -\dfrac{\pi}{3}\,,\,\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

حال مشتق را در بازهٔ $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ تعیین علامت می‌کنیم:

بنابراین تابع f در بازهٔ $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$، دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

۳۸ . گزینه ۳ می‌دانیم تابع درجه دوم و تابع هموگرافیک فاقد نقطه عطف هستند، یعنی هر دو ضابطه به تنهایی فاقد عطف هستند؛ بنابراین تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & ; \ x<1 \\ \dfrac{1}{x} & ; \ x\geq 1 \end{cases}$

فقط در نقطه مرزی ($x=1$) می‌تواند نقطه عطف داشته باشد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) مسلماً نادرست هستند. حال به بررسی نقطه $x=1$ می‌پردازیم:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$ تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & ; \ x<1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & ; \ x>1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1 \Rightarrow f'(x) = -1$$

بنابراین تابع f در نقطه $x=1$ دارای خط مماس واحد است. درنتیجه شرایط اولیه وجود عطف (دارا بودن خط مماس واحد) را دارد. با تشکیل ضابطه f''، داریم:

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x<1 \to f''_-(1) < 0 \\ \dfrac{2}{x^3} & ; \ x>1 \to f''_+(1) > 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع f'' در اطراف $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین $x=1$ طول نقطه عطف است.

۳۹ . گزینه ۲ ابتدا محل تلاقی نمودار تابع $y = \dfrac{x+1}{1-2x}$ را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم: یعنی برای محاسبه محل برخورد با محور xها به جای y صفر و برای محاسبه محل برخورد با محور yها به جای x صفر قرار می‌دهیم.

$A(-1,0), B(0,1)$

اکنون معادله خط گذرنده از نقاط A و B را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\cdot(x - x_A)$$

$$y - 0 = \frac{0-1}{-1-0}(x-(-1)) \Rightarrow y = x+1$$

با توجه به اینکه مرکز تقارن تابع هموگرافیک به فرم $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ نقطه $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ است، مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \dfrac{x+1}{-2x+1}$، نقطه $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ است.

می‌دانیم فاصله نقطه $(x_0\,,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $D = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

بنابراین فاصله نقطه $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ از خط $x-y+1=0$ برابر است با:

$$D = \frac{\left|\frac{1}{2}\times 1 - 1\times(-\frac{1}{2}) + 1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۴۰ . گزینه ۳ نمودار تابع را در دوره تناوب $[0, 2\pi]$ بررسی می‌کنیم:

نمودار مجانب قائم ندارد، بنابراین ریشهٔ مخرج، ریشهٔ صورت نیز هست.

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow a\sin 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + b = 0 \Rightarrow -a+b = 0 \Rightarrow a = b$$

با توجه به نمودار، تابع اکسترمم نسبی برابر ۲ دارد. ابتدا طول اکسترمم را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{a\sin 2x + a}{\sin x + \cos x} = a\times\frac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x} = a\times\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x} = a(\sin x + \cos x)$$

$$f'(x)=a(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})=a\ \times\frac{\sin\frac{\pi}{2}+1}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}\ =\frac{2a}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

۴۱ . گزینه ۱ نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم:

$$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)=0\Rightarrow x=0\ ,\ \pm\sqrt{3}$$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-4 min	↗	max	↘	-4 min	↗

نقاط $A(-\sqrt{3}\ ,\ -4)$ و $B(\sqrt{3}\ ,\ -4)$ نقاط مینیمم نسبی تابع‌اند و شیب خط AB برابر صفر است. حال نقاط عطف تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f''(x)=12x^2-12=0\Rightarrow x=\pm1$$

$x=\pm1$ ریشه‌های سادهٔ $f''(x)=0$ هستند؛ پس هردو، نقاط عطف تابع‌اند: $C(1\ ,\ 0)$ و $D(-1\ ,\ 0)$. شیب این پاره‌خط نیز صفر است و دو خط AB و CD موازی‌اند.

۴۲ . گزینه ۴ در ناحیهٔ دوم مختصات داریم $x<0$ و $y>0$؛ حال مختصات نقطه عطف مورد نظر را می‌یابیم:

$$y=kx^3+(k+1)x^2\to x_I=\frac{-b}{3a}=\frac{-(k+1)}{3k}<0\to(k<-1)\cup(k>0)\quad(I)$$

$$y_I=k(\frac{-(k+1)^3}{27k^3})+\frac{(k+1)^3}{9k^2}=\frac{2(k+1)}{27k^2}>0\to k+1>0\to(k>-1)\quad(II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)}k\in\varnothing\ (\text{هیچ مقدار})$$

۴۳ . گزینه ۳

$$\ldots-(k+2)x^2\to y'=\frac{3k}{2}x^2-2(k+2)x\to y''=3kx-2(k+2)=0\Rightarrow x=\frac{2(k+2)}{3k}<0$$

$$\ldots,0)\quad(1)$$

$$\ldots f(\frac{2(k+2)}{3k})<0\Rightarrow k(\frac{2(k+2)}{3k})^3-(k+2)(\frac{2(k+2)}{3k})^2<0\Rightarrow\overbrace{(\frac{2(k+2)}{3k})^2}^{+}\left(k(\frac{2(k+2)}{3k})-(k+2)\right)<0\Rightarrow\left(k(\frac{2(k+2)}{3k})-(k+2)\right)<0\Rightarrow\frac{-(k+2)}{3}\ldots$$

$$\ldots k+2>0\to k>-2\quad(2)\quad;\quad(1)\cap(2)=(-2\ ,0)$$

فقط -1 در بازهٔ نهایی عددی صحیح است.

پاسخنامه کلیدی

۱ . ۳	۸ . ۱	۱۵ . ۴	۲۲ . ۲	۲۹ . ۲	۳۶ . ۴	۴۳ . ۳
۲ . ۱	۹ . ۱	۱۶ . ۴	۲۳ . ۱	۳۰ . ۲	۳۷ . ۳	
۳ . ۱	۱۰ . ۱	۱۷ . ۱	۲۴ . ۳	۳۱ . ۱	۳۸ . ۳	
۴ . ۴	۱۱ . ۴	۱۸ . ۲	۲۵ . ۴	۳۲ . ۱	۳۹ . ۲	
۵ . ۳	۱۲ . ۲	۱۹ . ۱	۲۶ . ۱	۳۳ . ۲	۴۰ . ۳	
۶ . ۴	۱۳ . ۲	۲۰ . ۳	۲۷ . ۲	۳۴ . ۱	۴۱ . ۱	
۷ . ۲	۱۴ . ۱	۲۱ . ۱	۲۸ . ۳	۳۵ . ۴	۴۲ . ۴	