

## روابط مثلثاتی

## روابط بسط مجموع و تفاضل

برای محاسبه سینوس یا کسینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

## نتایج پرکاربرد روابط بالا:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right), \quad \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - \xi \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \xi \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$3\alpha$  ها :

## حل معادله مثلثاتی تانژانت

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

جواب معادله  $\tan x = \tan \alpha$  را به صورت زیر می‌توان نوشت:

- ۱۳۹۵ ۱. اگر  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  کدام است؟
- (۱)  $-2$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $2$
- ۱۳۹۵ ۲. اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{3}{4}$
- ۱۳۹۶ ۳. اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$
- ۱۳۸۸ ۴. اگر  $\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$
- ۱۳۷۲ ۵. حاصل  $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{3}$
- ۱۳۹۶ ۶. حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  ، کدام است؟
- (۱)  $2$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $2\sqrt{3}$
- ۱۳۹۱ ۷. ساده شده کسر  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟
- (۱)  $A \cos^{-2} 2\theta$  (۲)  $A \sin^{-2} 2\theta$  (۳)  $16 \cos^{-2} 2\theta$  (۴)  $16 \sin^{-2} 2\theta$
- ۱۳۷۱ ۸. اگر  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  و  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - m}{2 + m}$  باشد، حدود تغییرات  $m$  کدام است؟
- (۱)  $-1 < m < 2$  (۲)  $-2 < m < 1$  (۳)  $m > 1$  (۴)  $m < -2$
- ۱۳۸۱ ۹. ساده شده عبارت  $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  کدام است؟
- (۱)  $\cos \alpha - \sin \alpha$  (۲)  $\cos 2\alpha$  (۳)  $1 + \sin 2\alpha$  (۴)  $1 - \sin 2\alpha$
- ۱۳۸۲ ۱۰. حاصل  $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$
- ۱۳۹۹ ۱۱. اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  ریشه های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  باشند،  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟
- (۱)  $1$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $-3$  (۴)  $-1$

۱۳۷۷ ۱۲. حاصل عبارت  $2 \cos^2(\frac{7\pi}{4} - x) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x)$  برابر است با:

- ۱  $\sin 2x$    
  ۲  $-\cos 2x$    
  ۳  $-\sin 2x$    
  ۴  $\cos 2x$

۱۳۸۵ ۱۳. ساده شده عبارت  $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$  برابر کدام است؟

- ۱  $\sin 20^\circ$    
  ۲  $\cos 20^\circ$    
  ۳  $2 \sin 20^\circ$    
  ۴  $2 \cos 20^\circ$

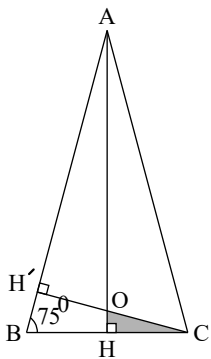
۱۳۸۳ ۱۴. اگر  $a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $8 \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} - b)$  کدام است؟

- ۱  $\sin 4a$    
  ۲  $\cos 4a$    
  ۳  $\sin^2 2a$    
  ۴  $\cos^2 2a$

۱۴۰۰ ۱۵. اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{96}{175}$    
  ۲  $\frac{1056}{175}$    
  ۳  $\frac{96}{175}$    
  ۴  $-\frac{1056}{175}$

۱۴۰۰ ۱۶. در شکل زیر مثلث  $ABC$  متساوی الساقین و طول ساق  $AC$  برابر ۶ است. مساحت مثلث  $OHC$  کدام است؟



- ۱  $\frac{2}{3}$    
  ۲  $\frac{4}{3}$    
  ۳  $\frac{18}{7 + 4\sqrt{3}}$    
  ۴  $\frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$

۱۴۰۱ ۱۷. اگر  $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام عدد می تواند باشد؟

- ۱  $-\frac{1}{3}$    
  ۲  $-2$    
  ۳  $\frac{1}{2}$    
  ۴  $3$

۱۴۰۰ ۱۸. اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  مقدار  $f(\frac{\pi}{36})$  کدام است؟

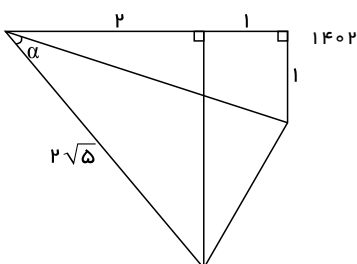
- ۱  $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16}$    
  ۲  $\frac{6 - \sqrt{3}}{16}$    
  ۳  $\frac{6 + \sqrt{3}}{16}$    
  ۴  $\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$

۱۳۷۹ ۱۹. با فرض  $f(x) = x^2 - 2$  مقدار  $f(f(f(2 \cos x)))$  کدام است؟

- ۱  $2 \sin^4 x$    
  ۲  $2 \cos^4 x$    
  ۳  $2 \sin 8x$    
  ۴  $2 \cos 8x$

۱۳۷۹ ۲۰.  $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$  و  $g(x) = \tan x$  می باشد در این صورت  $f(g(x))$  برابر است با:

- ۱  $\cos x$    
  ۲  $\cos \frac{x}{2}$    
  ۳  $\cos^2 2x$    
  ۴  $\cos 2x$



۱۴۰۲ ۲۱. در شکل زیر، مقدار  $\cos a$  چقدر است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{3}}{2}$    
  ۲  $\frac{\sqrt{2}}{2}$    
  ۳  $-\frac{\sqrt{3}}{15}$    
  ۴  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

۱۴۰۱ . ۲۲. اگر انتهای کمان  $x$  در ربع سوم و  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$  باشد، مقدار صحیح  $\tan \frac{x}{2}$  کدام است؟

۲ (۱)      -۲ (۲)      ۳ (۳)      -۳ (۴)

۱۴۰۱ . ۲۳. اندازه زاویه  $A$  در مثلث  $ABC$ ،  $45^\circ$  درجه بیشتر از اندازه زاویه  $B$  است. حاصل  $2 \cos A \sin B - \sin C$  کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)       $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱)

۱۴۰۰ . ۲۴. اگر  $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$  باشد مقدار  $f(\frac{41\pi}{9})$  کدام است؟

-۱ (۴)      ۱ (۳)       $\sqrt{3}$  (۲)       $-\sqrt{3}$  (۱)

۱۴۰۰ . ۲۵. اگر  $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟

$\frac{91}{105}$  (۴)       $\frac{16}{105}$  (۳)       $-\frac{16}{105}$  (۲)       $-\frac{91}{105}$  (۱)

۱۳۸۸ . ۲۶. اگر  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$  باشد،  $\tan 2\alpha$  چقدر است؟

$2,5$  (۴)       $2,4$  (۳)       $1,8$  (۲)       $1,5$  (۱)

۱۴۰۰ . ۲۷. ساده شده عبارت  $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  کدام است؟

$2 \tan(\frac{\theta}{2})$  (۴)       $2 \cot(\frac{\theta}{2})$  (۳)       $\sin(\frac{\theta}{2})$  (۲)       $\cos(\frac{\theta}{2})$  (۱)

۱۴۰۰ . ۲۸. اگر  $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$  باشد، مقدار  $f(\frac{\pi}{12})$  کدام است؟

$\frac{6 - \sqrt{27}}{32}$  (۴)       $\frac{6 - \sqrt{27}}{16}$  (۳)       $\frac{6 + \sqrt{27}}{16}$  (۲)       $\frac{6 + \sqrt{27}}{32}$  (۱)

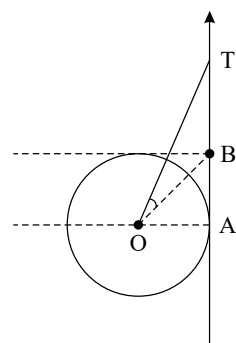
۱۳۹۹ . ۲۹. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع اول دایره مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{1}{7}$  باشد، مقدار  $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

$\frac{4}{5}$  (۴)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $-\frac{3}{5}$  (۲)       $-\frac{4}{5}$  (۱)

۱۳۹۹ . ۳۰. اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم دایره مثلثاتی و  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$  کدام است؟

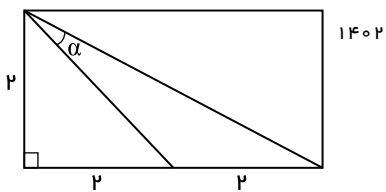
$\frac{4}{5}$  (۴)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $-\frac{3}{5}$  (۲)       $-\frac{4}{5}$  (۱)

۱۳۹۹ . ۳۱. با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر  $BT = 2$  باشد، مقدار  $\tan(\hat{TOB})$  کدام است؟



$\frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{1}{4}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)



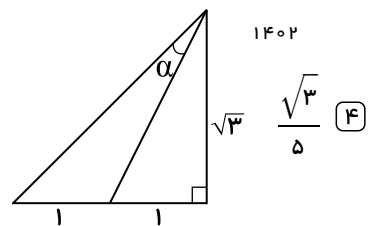
۳ (۲)

$\frac{1}{4}$  (۴)

۱ (۱)

$\frac{1}{2}$  (۳)

۳۲. در شکل زیر مقدار  $\cot \alpha$  کدام است؟



$\frac{\sqrt{3}}{5}$  (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$  (۲)

$\frac{1}{5\sqrt{3}}$  (۱)

۳۳. در شکل زیر، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

۳۴. در معادله مثلثاتی  $1 = 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6})$  اگر  $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

$-\sqrt{3}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۱

$$\boxed{1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\boxed{(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a} \quad \text{گزینه ۱ می دانیم:}$$

$$\boxed{\cot a - \tan a = 2 \cot 2a} \quad \text{گزینه ۲ می دانیم:}$$

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}) = -2 \cot x = -2 \left(\frac{1}{\tan x}\right) = -2 \left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

۲. گزینه ۲

$$\boxed{\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1$$

$$\Rightarrow -\tan \frac{\pi}{4} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$$

۳. گزینه ۲

$$\boxed{\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \quad , \quad \boxed{\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{گزینه ۳ می دانیم:}$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{-\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2(15^\circ)} = \frac{-\sqrt{2} \sin(-30^\circ)}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

۴. گزینه ۴

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad , \quad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad , \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \text{می دانیم:}$$

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{(1 - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\underbrace{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}_{\sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2} = \frac{16}{\sin^2 2\theta} = 16 \sin^{-2} 2\theta$$

۵. گزینه ۲

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}}$$

می دانیم:

بنابراین  $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-m}{2+m}$  داریم:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$

۹. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\begin{aligned} 2 \cos(\frac{\pi}{4} + a) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - a) &= 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos a - \sin a) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos a - \sin a) = (\cos a - \sin a)^2 \\ &= \cos^2 a + \sin^2 a - 2 \sin a \cdot \cos a = 1 - \sin 2a \end{aligned}$$

۱۰. گزینه ۳

می‌دانیم:  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ, \quad \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 165^\circ \cdot \cos 105^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱۱. گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

چون  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  هستند، پس داریم:

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

۱۲. گزینه ۳

می‌دانیم  $\cos(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \alpha) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$  و  $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$2 \cos^2(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - x) = 1 + \cos(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2x)$$

طبق فرمول‌های فوق داریم:

$$2 \cos^2(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - x) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1 + \cos(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2x) - \cos^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \cos(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2x) = -\sin 2x$$

۱۳. گزینه ۴

می‌دانیم  $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

$$\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \cos 50^\circ \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 50^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

توجه: اگر  $\alpha + \beta = 90^\circ$  آنگاه  $\sin \alpha = \cos \beta$

۱۴. گزینه ۱ می‌دانیم  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$  ،  $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$

$$\lambda \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} - b) = \lambda \cos a \cos b \sin a \sin b$$

$$= 2(\sin a \cos a)(\sin b \cos b) = 2 \sin 2a \sin 2b$$

$$\xrightarrow{a+b=\frac{\pi}{2}} 2 \sin 2a \sin 2(\frac{\pi}{2} - a) = 2 \sin 2a \sin(\frac{\pi}{2} - 2a) = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 4a$$

۱۵. گزینه ۲ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)}$$

دقت کنید که:  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$  و  $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha$

برای حل سؤال مقادیر  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  و  $\cot 2\alpha$  را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$1) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2) \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$3) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$4) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

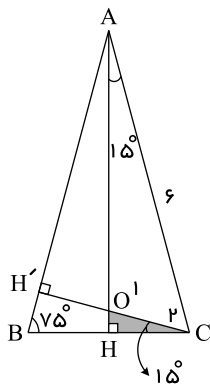
$$5) \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{44 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$

۱۶. گزینه ۴

می‌دانیم:  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ,  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$



روش اول: دقت کنید در مثلث  $OHC$  داریم  $\hat{C}_1 = 15^\circ$ ,  $\hat{H} = 90^\circ$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه  $15^\circ$ ، ارتفاع وارد بر وتر  $\frac{1}{4}$  وتر است.

$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} OC \times OC = \frac{OC^2}{8}$$

از طرفی در مثلث  $OAC$  طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{O}_1} \Rightarrow \frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{6}{\underbrace{\sin 105^\circ}_{\cos 15^\circ}} \Rightarrow OC = 6 \times \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 6 \tan 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$



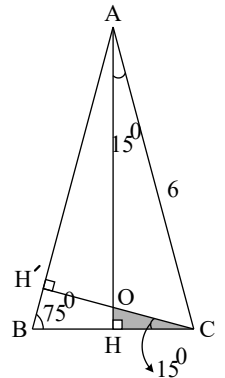
$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{(6 \tan 15^\circ)^2}{8} = \frac{36}{8} \times \frac{1}{(\sqrt{7} + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(\sqrt{7} + 4\sqrt{3})}$$

\* این روش فراتر از کتاب ریاضی تجربی است و مناسب دانش آموزان رشته ریاضی است.

روش دوم:

$$\triangle AHC: \sin 15^\circ = \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=6} HC = 6 \sin 15^\circ$$

$$\triangle OHC: \tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = HC \times \tan 15^\circ$$



$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times HC \times OH$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times (6 \sin 15^\circ) \times (6 \sin 15^\circ \tan 15^\circ) = \frac{1}{2} \times 36 \sin^2 15^\circ \times \tan 15^\circ$$

می دانیم:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

از طرفی:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

پس داریم:

$$S_{\triangle OHC} = 18 \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) \times \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{9}{2(\sqrt{7} + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(\sqrt{7} + 4\sqrt{3})}$$

۱۷. گزینه ۳

$$1 \circ (\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{1 \circ} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

طرفین تساوی فوق را به توان ۲ می رسانیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{9 \times 5}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

حال از رابطه  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$  استفاده می کنیم:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5 + 5 \tan^2 \alpha = 4 \circ \tan \alpha \Rightarrow 5 \tan^2 \alpha - 4 \circ \tan \alpha + 5 = 0 \Rightarrow 5 \tan^2 \alpha - 20 \tan \alpha + 25 = 0$$

$$\Delta = 20^2 - 4 \times 5 \times 25 = 9 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{20 \pm 3}{10} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۸. گزینه ۴

$$\text{می دانیم: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

ضابطه تابع f را در  $\sin^2 3x$  ضرب و تقسیم می کنیم.

$$f(x) = 16 \left( \frac{\frac{1}{2} \sin 6x}{\sin 3x \cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x} \right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

$$\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$$

$$\sin 12x \cos 12x = \frac{1}{2} \sin 24x$$

$$\sin 24x \cos 24x = \frac{1}{2} \sin 48x$$

$$f(x) = 16 \left( \frac{\frac{1}{16} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left( \frac{\sin \frac{48\pi}{36}}{16 \sin \frac{3\pi}{36}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}}$$

از طرفی می‌دانیم  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  و  $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  و البته  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{16 \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}\right)} = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

۱۹. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\cos^2 u - 1 = \cos 2u$$

$$f(2 \cos x) = 4 \cos^2 x - 2 = 2(\underbrace{2 \cos^2 x - 1}_{\cos 2x}) = 2 \cos 2x$$

$$f(f(2 \cos x)) = 4 \cos^2 2x - 2 = 2(\underbrace{2 \cos^2 2x - 1}_{\cos 4x}) = 2 \cos 4x$$

$$f(f(f(2 \cos x))) = 4 \cos^2 4x - 2 = 2(\underbrace{2 \cos^2 4x - 1}_{\cos 8x}) = 2 \cos 8x$$

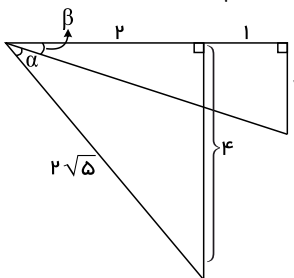
۲۰. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f(g(x)) = \frac{1 - (g(x))^2}{1 + (g(x))^2} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos 2x}{1} = \cos 2x$$

۲۱. گزینه ۲ مطابق شکل، زاویه مجاور  $\alpha$  را  $\beta$  در نظر می‌گیریم. همچنین طبق قضیه فیثاغورس ضلع قائمه روبروی زاویه  $\alpha + \beta$  برابر ۴ می‌شود. طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} \alpha = (\alpha + \beta) - \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}}, \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos((\alpha + \beta) - \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(راه حل دوم) از  $\tan(\alpha + \beta)$  استفاده می کنیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{3}}{1 - \frac{\tan \alpha}{3}} \Rightarrow \tan \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

 ۲۲. گزینه ۴ از رابطه داده شده، مقدار  $\sin x$  را محاسبه می کنیم.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 4 + 4 \sin x = 1 - \sin x \Rightarrow 5 \sin x = -3 \Rightarrow \sin x = \frac{-3}{5}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه } x} \cos x = \frac{-4}{5}$$

 حاصل  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  را می یابیم.

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{2 \cos^2(\frac{x}{2})} = \tan^2(\frac{x}{2}) \Rightarrow \tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - (-\frac{4}{5})}{1 + (-\frac{4}{5})} \Rightarrow \tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow \tan(\frac{x}{2}) = \pm 3$$

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

 $\frac{x}{2}$  زاویه ای در ناحیه دوم است و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:

$$\tan(\frac{x}{2}) = -3$$

۲۳. گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A = B + 45^\circ, A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + 45^\circ + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (45^\circ + 2B)$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می کنیم:

$$2 \cos A \sin B - \sin C = 2 \cos(B + 45^\circ) \sin B - \sin(180^\circ - (45^\circ + 2B)) =$$

$$2(\cos B \cos 45^\circ - \sin B \sin 45^\circ) \sin B - \sin(45^\circ + 2B) =$$

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos B - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin B\right) \sin B - \sin 45^\circ \cos 2B - \cos 45^\circ \sin 2B =$$

$$\sqrt{2} \sin B \cos B - \sqrt{2} \sin^2 B - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2B - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2B =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2B - \sqrt{2} \left(\frac{1 - \cos 2B}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2B - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2B =$$

$$-\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2B = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2B - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۴. گزینه ۱

 قبل از حل سؤال نحوه محاسبه  $\sin 3\alpha$  و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می کنیم.

$$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

 حال تابع  $(f\alpha)$  را ساده می کنیم.

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 2 \sin 3\alpha$$

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{36\pi + 5\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(4\pi + \frac{5\pi}{9}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{9} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

۲۵. گزینه ۲

می دانیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

از طرفی:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8 \times 17 - 8 \times 15}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{\frac{16}{15}}{-7} = -\frac{16}{105}$$

 دقت کنید اگر  $\frac{\alpha}{2}$  در ربع اول باشد با توجه به مقدار  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ ،  $\tan \alpha$  نیز ربع اول خواهد بود و اگر  $\frac{\alpha}{2}$  در ربع سوم باشد باز هم  $\alpha$  در ربع اول خواهد بود.

 ۲۶. گزینه ۳ با توجه به رابطه  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$  داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{36}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

۲۷. گزینه ۳ راه حل اول:

مخرج مشترک گرفته و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

۲۸. گزینه ۱ روش اول:

$$f(x) = 32(\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2$$

 عبارت داخل پرانتز را در  $\sin x$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = 32 \left( \frac{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

$$f(x) = 32 \left( \frac{1 - \sin 32x}{32} \right)^2 = \frac{\sin^2 32x}{32 \sin^2 x} = \frac{\sin^2 32x}{16(1 - \cos 2x)}$$

 در عبارت قبلی از اتحادهای  $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$  و  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$  استفاده کرده‌ایم.

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin^2 \frac{8\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

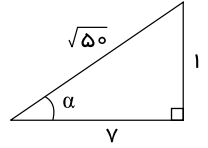
روش دوم: می‌توانیم  $\cos 15^\circ$  را ابتدا محاسبه کرده و سپس در صورت سؤال قرار دهیم:  $(\frac{\pi}{12} = 15^\circ)$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 32 \cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ \cos^2 120^\circ \cos^2 240^\circ = 32 \times \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32}$$

۲۹. گزینه ۱ اگر  $\alpha$  در ناحیه اول باشد، به کمک مثلث قائم‌الزاویه زیر مقادیر  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{50}}$$



$$\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right) &= \sin \frac{13\pi}{4} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{13\pi}{4} \cdot \sin \alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{50}}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{50}} = -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = -\frac{7\sqrt{2} \times \sqrt{50}}{50} \\ &= -\frac{7 \times 10}{50} = -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

۳۰. گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{ناحیه دوم } \alpha} \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

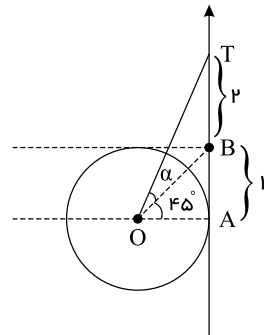
$$\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = -\sqrt{\frac{98}{100}} = -\frac{\sqrt{98}}{10}$$

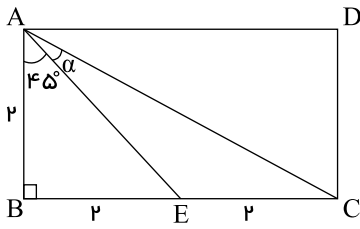
$$\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \frac{11\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \sin \frac{11\pi}{4} \cdot \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{98}}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{\sqrt{196}}{20} - \frac{\sqrt{4}}{20} = \frac{14}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20} = \frac{3}{5}$$

۳۱. گزینه ۳ می‌دانیم که  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$  است. حال با در نظر گرفتن دایره مثلثاتی زیر داریم:

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + 45^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan(\alpha + 45^\circ) - 1}{1 + \tan(\alpha + 45^\circ)} = \frac{3 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$



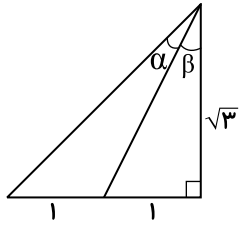
۳۲. گزینه ۲ مثلث قائم‌الزاویه سمت چپ، متساوی‌الساقین بوده و زاویه حاده آن  $45^\circ$  است. طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{2} = 1.5 \Rightarrow \tan \alpha = \tan((45^\circ + \alpha) - 45^\circ) \\ \tan \alpha = 1 \\ \Rightarrow \frac{\tan(45^\circ + \alpha) - \tan 45^\circ}{1 + \tan(45^\circ + \alpha) \tan 45^\circ} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1.5 - 1}{1 + 1.5 \times 1} = \frac{0.5}{2.5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cot \alpha = 5 \end{cases}$$

توجه طبق شکل  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$  است، پس  $\cot \alpha > 1$  می‌باشد و تنها گزینه (۲) درست است!

۳۳. گزینه ۴



$$\tan \alpha = \tan((\alpha + \beta) - \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan((\alpha + \beta) \tan \beta)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

۳۴. گزینه ۴

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} \sqrt{3} \sin x - \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}; \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1 \xrightarrow{(1), (2)} \sqrt{3} + m \times \frac{1}{3} = 1 \rightarrow m = -3$$

## پاسخنامه کلیدی

۱ . ۱	۶ . ۳	۱۱ . ۴	۱۶ . ۴	۲۱ . ۲	۲۶ . ۳	۳۱ . ۳
۲ . ۱	۷ . ۴	۱۲ . ۳	۱۷ . ۳	۲۲ . ۴	۲۷ . ۳	۳۲ . ۲
۳ . ۲	۸ . ۲	۱۳ . ۴	۱۸ . ۴	۲۳ . ۲	۲۸ . ۱	۳۳ . ۴
۴ . ۲	۹ . ۴	۱۴ . ۱	۱۹ . ۴	۲۴ . ۱	۲۹ . ۱	۳۴ . ۴
۵ . ۲	۱۰ . ۳	۱۵ . ۲	۲۰ . ۴	۲۵ . ۲	۳۰ . ۳	