

روابط دنباله ها

مجموع جملات دنباله حسابی

برای یافتن مجموع n جمله اول دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

چنانچه جمله اول و جمله n ام دنباله در دسترس باشد می توان برای محاسبه مجموع n جمله اول دنباله از رابطه زیر استفاده کرد:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

توجه: بهتر است فرمول مجموع n عدد طبیعی، n عدد طبیعی زوج و n عدد طبیعی فرد را به خاطر بسپارید:

$$\text{مجموع } n \text{ عدد طبیعی} = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{مجموع } n \text{ عدد طبیعی زوج} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$\text{مجموع } n \text{ عدد طبیعی فرد} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

نکته: فرمول مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی حتماً عبارتی درجه دوم بر حسب n و بدون مقدر ثابت است. این عبارت را می توان به شکل $S_n = An^2 + Bn$ نمایش داد. هرگاه فرمول مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به صورت $S_n = An^2 + Bn$ داشته باشیم، می توانیم موارد زیر را به دست آوریم:

$$① S_n = An^2 + Bn \Rightarrow a_1 = S_1 = A + B$$

جمله اول دنباله:

$$② S_n = An^2 + Bn \Rightarrow d = 2A$$

قدرنسبت دنباله:

$$③ S_n = An^2 + Bn \xrightarrow{n \geq 2} a_n = S_n - S_{(n-1)}$$

جمله n ام دنباله:

مجموع جملات دنباله هندسی

برای یافتن مجموع n جمله اول دنباله هندسی با قدرنسبت q و جمله اول a_1 می توان از فرمول روبهرو استفاده نمود:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1 - (a_1q^{n-1})q}{1-q} = \frac{a_1 - a_n \times q}{1-q}$$

با ساده کردن فرمول بالا می توان گفت: (با فرض این که a_n جمله n ام باشد).

۱. تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

- ۱۳۹۴ ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ ۲ ۴ ۳

۲. حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟

- ۱۳۹۳ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

۳. اگر $52 = \frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}}$ باشد مقدار x کدام است؟

- ۱۴۰۰ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۴. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- ۱۳۸۹ ۱ $\frac{81}{16}$ ۲ ۹ ۳ ۸ ۴ ۱۶

۵. اعداد طبیعی را طوری دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$ مجموع اعداد واقع در دسته بیستم، کدام است؟

- ۱۳۹۹ ۱ ۴۱۲۰ ۲ ۴۰۲۰ ۳ ۴۰۱۰ ۴ ۳۹۸۰

۶. در یک دنباله عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

- ۱۳۹۰ ۱ ۳۲ ۲ ۳۴ ۳ ۳۶ ۴ ۳۸

۷. مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۷، کدام است؟

- ۱۳۹۸ ۱ ۷۲۱ ۲ ۷۲۸ ۳ ۷۳۵ ۴ ۷۴۲

۸. بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

- ۱۳۸۸ ۱ $30(2 + \sqrt{2})$ ۲ $48\sqrt{2}$ ۳ $30(\sqrt{2} + 1)$ ۴ $36(\sqrt{2} + 1)$

۹. حاصل $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ۱۳۸۲ ۱ ۵۰۷ ۲ ۵۱۱ ۳ ۵۱۲ ۴ ۵۱۶

۱۰. مجموع n جمله اول از یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به

جمله هجدهم، کدام است؟

- ۱۳۹۰ ۱ ۹ ۲ $\frac{29}{3}$ ۳ $\frac{49}{3}$ ۴ ۱۸

۱۱. در یک دنباله هندسی مجموع ۸ جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع ۴ جمله اول آن است، جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

- ۱۳۸۵ ۱ $\frac{1}{16}$ ۲ $\frac{1}{8}$ ۳ $\frac{5}{32}$ ۴ $\frac{1}{4}$

۱۲. بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل، تشکیل یک دنباله هندسی دهند، مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

- ۱۳۹۱ ۱ ۴۸۲ ۲ ۴۸۴ ۳ ۴۸۶ ۴ ۴۸۸

۱۳. اعداد $1, x, y, \frac{5}{4}, \dots$ ، چهار جمله اول از یک دنباله عددی اند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است؟

۶۸ (۴)

۶۷٫۵ (۳)

۶۲٫۵ (۲)

۵۷ (۱)

۱۴. از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین با اندازه ۸٪ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین در مجموع توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

۱۴۰۰

۶۶ (۴)

۶۰ (۳)

۵۷ (۲)

۵۴ (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۳ ابتدا مقادیر دنباله را به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ فرض می‌کنیم. بنابراین جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_{2n} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}$$

وقتی بخواهیم فقط جمع ردیف‌های فرد را حساب کنیم، باید بدانیم که تعداد جملات نصف می‌شود و چون یک در میان باید انتخاب کنیم قدر نسبت مربع می‌شود.

$$\text{جمع جملات مرتبه فرد} = \frac{a_1(1 - (q^2)^n)}{1 - q^2}$$

$$\text{جمع کل جملات} = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} = \frac{3a_1(1 - q^{2n})}{(1 - q) \cdot (1 + q)} \Rightarrow \frac{3}{1 + q} = 1 \Rightarrow q = 2$$

۲. گزینه ۱ تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

صورت کسر، مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت t است که دوازده جمله دارد و مخرج کسر، مجموع چهار جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت t^3 است.

$$t^{11} + t^{10} + \dots + 1 = 1 \times \frac{t^{12} - 1}{t - 1} \quad (a_1 = 1, q = t)$$

$$t^9 + t^6 + t^3 + 1 = 1 \times \frac{(t^3)^4 - 1}{t^3 - 1} \quad (a_1 = 1, q = t^3)$$

$$\Rightarrow \frac{t^{11} + t^{10} + \dots + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{\frac{t^{12} - 1}{t^3 - 1}} = \frac{t^3 - 1}{t - 1} = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{حال با قرار دادن } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۳. گزینه ۲ از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{3^x(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243)}{2^x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + 2 + 4 + 8\right)} = 52$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \times \frac{364}{63} = 52 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{63 \times 52}{364 \times 4}$$

$$\xrightarrow{364=52 \times 7} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = 2$$

۴. گزینه ۴

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\left. \begin{aligned} S_4 = 136 &\Rightarrow \frac{a(q^4 - 1)}{q - 1} = 136 \\ S_6 = 153 &\Rightarrow \frac{a(q^6 - 1)}{q - 1} = 153 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_6}{S_4} = \frac{\frac{a(q^6 - 1)(q^2 + 1)}{q - 1}}{\frac{a(q^4 - 1)}{q - 1}} = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow q^2 + 1 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{a}{aq^4} = 16$$

۵. گزینه ۳

می‌دانیم: مجموع اعداد ۱ تا n و مجموع جملات a_1 تا a_n از روابط زیر به دست می‌آید:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$a_1 + \dots + a_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$$

در دسته اول، جمله و در دسته دوم، جمله و در دسته سوم، جمله و... در دسته نوزدهم تعداد «۱۹» جمله به کار رفته است. بنابراین تعداد اعداد به کار رفته تا قبل از دسته بیستم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19(19 + 1)}{2} = 190$$

پس تا قبل از دسته بیستم تعداد «۱۹۰» عدد به کار رفته است و دسته بیستم از عدد ۱۹۱ شروع می شود و تا عدد «۲۱۰» ادامه دارد (تعداد بیست عدد):

$$a_{20} = \{191, 192, \dots, 210\}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (191 + 210) = 4010$$

۶. گزینه ۲

نکته: در دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d می دانیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\begin{cases} S_{20} = 3S_{12} \\ a_{20} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{2}(2a + 19d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a + 11d) \\ a + 19d = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + d = 0 \\ a + 19d = 6 \end{cases} \Rightarrow a = -2, d = 4$$

$$a_{10} = a + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

۷. گزینه ۲ می دانیم: اگر n تعداد جملات یک دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a باشد، آنگاه مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot d)$$

کوچکترین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد ۱۴ است و بزرگترین آن عدد $14 \times 7 = 98$ می باشد بنابراین تعداد جملات آن:

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{98 - 14}{7} + 1 = 13$$

$$S_n = \frac{13}{2} \cdot (2(14) + 12 \times 7) = 728$$

۸. گزینه ۳ اگر بین دو عدد a و b عدد k را طوری قرار دهیم که این $k+2$ عدد، تشکیل دنباله هندسی دهند، قدرنسبت این دنباله از رابطه $q^{k+1} = \frac{a}{b}$ یا $q^{k+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آید.

اگر جمله اول ۲ و جمله هشتم $16\sqrt{2}$ باشد، در این صورت داریم:

$$q^{6+1} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = \frac{2^4\sqrt{2}}{2^1} = 2^3\sqrt{2} = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q^7 = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

می دانیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می آید، داریم:

$$S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} \Rightarrow S_8 = \frac{2(16-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

با ضرب کردن مخرج و صورت در $(\sqrt{2}+1)$ و گویا کردن مخرج داریم:

$$S_8 = \frac{30}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۹. گزینه ۲ تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q داریم:

$$\text{مجموع } n \text{ جمله اول: } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

روش اول:

$$\begin{aligned} \overbrace{(1+x+x^2+\dots+x^8)}^{a_1=1, q=x, s_9=?} \cdot \overbrace{(1-x+x^2-\dots+x^8)}^{a_1=1, q=-x, s_9=?} &= \left(\frac{1 \times (1-x^9)}{1-x}\right) \left(\frac{1 \times (1-(-x)^9)}{1+x}\right) \\ &= \frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-(x^9)^2}{1-x^2} = \frac{1-2^9}{1-2} = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) \Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + 1) \Rightarrow x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + 1 = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

$$\left(\frac{x^9 - 1}{x - 1}\right) \cdot \left(\frac{x^9 + 1}{x + 1}\right) = \frac{x^{18} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{2})^{18} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 512 - 1 = 511$$

۱۰. گزینه ۴ روش اول: اگر جملات دنباله حسابی (عددی) را با a_1, a_2, \dots نشان دهیم، داریم:

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 9 + 9 = 18$$

روش دوم: در دنباله حسابی همواره داریم: $a_n = S_n - S_{n-1}$ و $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$\begin{cases} a_7 + a_8 + \dots + a_{17} + a_{18} = \frac{(18-7+1)}{2}(a_7 + a_{18}) = 6(a_7 + a_{18}) \\ a_7 = S_7 - S_6 = -\frac{28}{3} + 9 = -\frac{1}{3}, a_{18} = S_{18} - S_{17} = 9 - \frac{17}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = 6\left(-\frac{1}{3} + \frac{10}{3}\right) = 18$$

۱۱. گزینه ۲

تذکر: در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_8 = \frac{5}{4}S_4 \Rightarrow a_1 \frac{1-q^8}{1-q} = \frac{5}{4}a_1 \frac{1-q^4}{1-q} \Rightarrow 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

۱۲. گزینه ۲ جمله عمومی در دنباله هندسی برابر است با: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

جمله اول را $a_1 = 4$ و در نتیجه جمله پنجم را برابر $a_5 = 324$ در نظر می گیریم. با توجه به صورت سؤال، این پنج جمله، مثبت هستند، یعنی $q > 0$ داریم:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81 \xrightarrow{q>0} q = 3$$

مجموع این پنج جمله برابر است با:

$$S_5 = a_1 \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1}\right) \Rightarrow S_5 = 4 \left(\frac{3^5 - 1}{3 - 1}\right) = 4 \times \frac{243 - 1}{2} = 484$$

۱۳. گزینه ۳

در یک دنباله عددی داریم:

$$a_n - a_m = (n - m) \cdot d$$

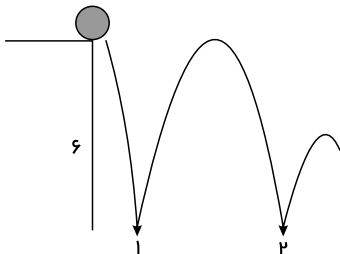
همچنین مجموع n جمله اول دنباله ای با جمله اول a_1 و جمله n ام a_n برابر با $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ می باشد.

$$d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{4} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \xrightarrow[n=15]{a_1=1, d=\frac{1}{2}} S_{15} = \frac{15}{2} \left[2 \times (1) + (15-1) \times \frac{1}{2} \right] \Rightarrow S_{15} = 67,5$$

۱۴. گزینه ۱

ابتدا توپ ۶ متر طی می کند تا به زمین برسد از این جا به بعد هر قدر به سمت بالا حرکت کند به همان میزان باید برگردد.



پس می توانیم فقط مسافت های طی شده به سمت بالا را محاسبه کنیم و در آخر در عدد ۲ ضرب کنیم، یعنی:

(مسافت های به سمت بالا) $6 + 2$: مسافت کل

$$a_1 = \frac{\lambda}{10} \times 6$$

$$a_2 = \frac{\lambda}{10} \times \frac{\lambda}{10} \times 6$$

واضح است یک دنباله هندسی از اعداد با $q = \frac{\lambda}{10}$ و $a_1 = \frac{\lambda}{10} \times 6$ داریم و باید مجموع صد جمله اول آن را بیابیم. طبق نکته حد مجموع چون قدرنسبت کوچک تر از واحد است، هرچه به توان برسد کوچک تر می شود.

$$S_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{q^n \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$= 6 + 2 \left(\frac{0,8 \times 6}{1 - 0,8} \right) = 54$$

پاسخنامه کلیدی

۱ . ۳

۳ . ۲

۵ . ۳

۷ . ۲

۹ . ۲

۱۱ . ۲

۱۳ . ۳

۲ . ۱

۴ . ۴

۶ . ۲

۸ . ۳

۱۰ . ۴

۱۲ . ۲

۱۴ . ۱