حد و پیوستگی

هم ارزی های مورد استفاده در حد های مبهم

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$ یا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}=\dfrac{b}{a}$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$ یا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\tan ax}=\dfrac{b}{a}$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}=\dfrac{a}{b}$

⑤ $\lim\limits_{u\to 0} 1-\cos^m u=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{mu^2}{2}$

⑥ $\lim\limits_{u\to 0}\cos^m u=\lim\limits_{u\to 0}(1-\dfrac{mu^2}{2})$

⑦ $\lim\limits_{u\to 0}\sqrt[p]{1+u}=\lim\limits_{u\to 0}(1+\dfrac{u}{p})$

مجانب قائم

خط $x=a$ را مجانب قائم تابع $y=f(x)$ می‌گویند، هرگاه حداقل یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

به عبارت دیگر خط $x=a$ مجانب قائم تابع است، هرگاه حد تابع در آن نقطه یا یکی از حدود یک طرفه تابع در آن نقطه ∞ شود.

یافتــن مجانب‌های قائم توابع به فرم $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

برای یافتن مجانب قائم توابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) نقاطی را می‌یابیم که حد راست یا حد چپ تابع $g(x)$ (مخرج کسر) در آن‌ها صفر شود، یعنی: $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ یا $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)=0$

بدیهی است که اگر تابع $g(x)$ یک تابع پیوسته باشد، این نقاط همان ریشه‌های (مخرج) تابع $g(x)$ هستند.

ب) با توجه به دامنهٔ تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ باید از وجود همسایگی راست یا چپ نقطهٔ $x=a$ در درون دامنهٔ تابع اطمینان حاصل کنیم.

پ) اگر این نقاط حد تابع $f(x)$ (صورت کسر) را صفر نکند ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq 0$ یا $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq 0$) حتماً مجانب قائم تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ می‌باشند،

زیرا: $\lim\limits_{x\to a^+} y=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{0}=+\infty$ یا $-\infty$ $(L\neq 0)$

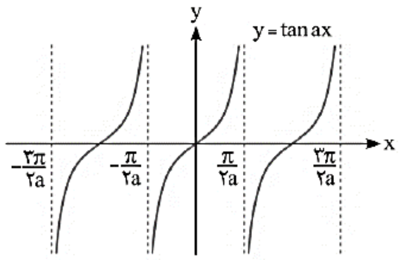
یا $\lim\limits_{x\to a^-} y=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{0}=+\infty$ یا $-\infty$ $(L\neq 0)$

ت) چنان‌چه حد تابع $f(x)$ در این نقاط برابر صفر شود، نتیجهٔ نهایی بعد از محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ یا $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ مشخص می‌شود.

مجانب های قائم معروف:

① مجانب‌های قائم تابع $y=\tan ax$ به صورت $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2a}$ می‌باشند. $(a>0, k\in\mathbb{Z})$

به نمودار مقابل توجه کنید.



برای نمونه مجانب‌های قائم تابع $y=\tan 3x$ به صورت $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{6}$ می‌باشند که عبارت‌اند از:

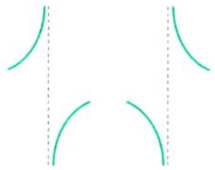
$x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{3\pi}{6}$, $x_3=\dfrac{5\pi}{6}$, ...

③ مجانب‌های قائم تابع $y=\log_a f(x)$ در نقاطی یافت می‌شوند که $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=0$ یا $\lim\limits_{x\to x_2} f(x)=+\infty$.

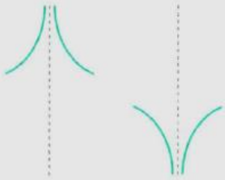
البته نقاط x_1 و x_2 باید در دامنه تابع دارای همسایگی راست یا چپ باشند.

تحلیل نموداری مجانب قائم

الف) **مجانب قائم فرد:** این مجانب قائم، ریشهٔ مخرج $\frac{f(x)}{g(x)}$ است، اما ریشهٔ صورت آن نیست. در واقع ریشهٔ $g(x)$ است، ولی ریشهٔ $f(x)$ نیست. در ضمن مرتبهٔ آن، به عنوان ریشهٔ $g(x)$ عددی فرد است.
نمودار تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در مجاورت مجانب قائم فرد آن، به‌صورت دو شاخهٔ غیرهمسایه مشاهده می‌شود.



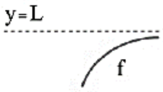
ب) **مجانب قائم زوج:** این مجانب قائم برای تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$، ریشهٔ $g(x)$ است، اما ریشهٔ $f(x)$ نیست. ولی یا مرتبهٔ آن به عنوان ریشهٔ $g(x)$ عددی زوج است یا ریشهٔ یک عبارت قدرمطلق کلی است (یعنی عبارتی مانند $|A(x)|$).
نمودار تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در مجاور مجانب قائم زوج آن، به‌صورت دو شاخهٔ همسایه مشاهده می‌شود.



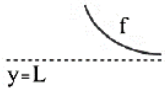
مجانب افقی

خط $y=L$ را مجانب افقی تابع $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

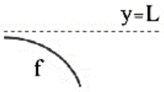
(الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$



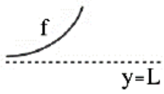
یا



(ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

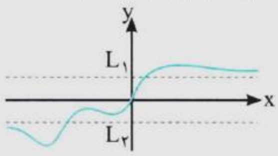


یا



تحلیل نموداری مجانب افقی

خط‌چین‌ها در شکل زیر مجانب‌های افقی نمودار $y=f(x)$ هستند.

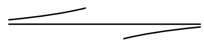
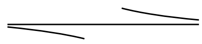
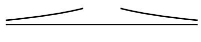
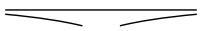


$L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$L_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

همان‌طور که می‌بینید در شاخهٔ سمت راست، نمودار $y=f(x)$ بالاتر از مجانب افقی خودش قرار دارد. این به زبان ریاضی یعنی بازه‌ایی وجود دارد مانند $(a,+\infty)$ که در آن $f(x)>L_1$ است. به عنوان یک دستهٔ مهم، توابع نزولی این ویژگی را دارند.
در سمت چپ نمودار، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نمودار $y=f(x)$ پایین‌تر از خط مجانب افقی خودش است.

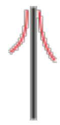
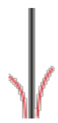
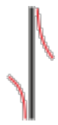
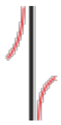
۱. نمودار تابع $y=\dfrac{2x^2-x-2}{x^2+2x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟ ۱۳۹۸

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۲. دو تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ و $g(x)=\dfrac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض‌اند. تعداد مجانب‌های نمودار تابع $(f+g)$ کدام است؟ ۱۳۸۵

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟ ۱۳۸۲

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۴. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$، خط مجانب افقی خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط مجانب قائم کدام است؟ ۱۳۸۸

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵. اگر $f(x)=\dfrac{x+11}{x^2-3x-4}$, $g(x)=\dfrac{3}{x-4}$، نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟ ۱۳۹۰

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-1,4)$ ۴) $(4,0)$

۶. خط به معادلهٔ $y=\dfrac{3}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}$ است. معادلهٔ مجانب قائم نمودار تابع f کدام است؟ ۱۳۸۲

۱) $x=-4$ ۲) $x=-2$ ۳) $x=2$ ۴) $x=4$

۷. دو تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+2}$, $g(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر B, A محل تلاقی مجانب‌های منحنی تابع $(g-f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟ ۱۳۸۵

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸. تابع $f(x)=\dfrac{|ax+1|+2x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشهٔ مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟ ۱۴۰۱

۱) -3 ۲) ۱ ۳) $-\dfrac{1}{2}$ ۴) $\dfrac{1}{4}$

۹. نقطهٔ $A(-\dfrac{1}{2},3)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y=\dfrac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$ است. مقدار $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟ ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) $\dfrac{3}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) ۱

۱۰. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{ax^2+bx+c}$ دارای خط‌های مجانب $y=-1$، $x=-2$ و $x=1$ است. $f(-1)$ کدام است؟ ۱۳۹۹

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۱٫۵ ۳) ۱٫۷۵ ۴) $-1{,}5$

۱۱. کدام‌یک از خطوط زیر مجانب منحنی $y=۱+\frac{۱}{x^۲-۲x}$ <u>نیست</u>؟ ۱۳۸۳

(۱) $x=۲$ (۲) $x=۰$ (۳) $y=۱$ (۴) $y=۱+x$

۱۲. اگر تابع $f(x)=\frac{x^۳-۵x+۴}{(x-a)(۴x^۲-۴x+۱)}$، فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟ ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۲

۱۳. تابع $f(x)=\frac{ax^۳-bx^۲+۲}{ax^۳-bx+۲}$ در دو نقطهٔ ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد مقدار a و b کدام‌اند؟ ۱۴۰۰

(۱) $a=۰\ ,\ b=۲$ (۲) $a=۸\ ,\ b=۱۰$ (۳) $a=-۲\ ,\ b=۰$ (۴) $a=-۸\ ,\ b=-۶$

۱۴. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام است؟ ۱۳۹۹

(۱) $y=-۱$ (۲) $y=-\frac{۱}{۲}$ (۳) $y=\frac{۱}{۲}$ (۴) $y=\frac{۳}{۲}$

۱۵. نمودار تابع $f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$ دارای خط‌های مجانب $y=-۱$، $x=-۲$ و $x=۱$ است. $f(-۱)$ کدام است؟ ۱۳۹۹

(۱) ۱٫۲۵ (۲) ۱٫۵ (۳) ۱٫۷۵ (۴) $-۱٫۵$

۱۶. حاصل $\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ ، کدام است؟ ۱۳۹۸

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) π (۴) ۲π

۱۷. حاصل $\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}$ کدام است؟ ۱۳۹۹

(۱) -۲ (۲) $-\sqrt{۲}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) ۲

۱۸. حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲x}$ کدام است؟ ۱۳۸۴

(۱) ∞ (۲) ۳ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۹. حاصل $\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cot x$ ، کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است) ۱۳۹۴

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) حد ندارد.

۲۰. حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\cos^۲x-\sqrt{\cos x}}{x^۲}$، کدام است؟ ۱۳۹۳

(۱) $-\frac{۳}{۲}$ (۲) $-\frac{۳}{۴}$ (۳) $-\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱. حاصل $\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\cos\pi x}{x-۴\sqrt{x}+۴}$ کدام است؟ ۱۳۸۷

(۱) ۰ (۲) ۴π (۳) $۴\pi^۲$ (۴) $۸\pi^۲$

۲۲. حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۵x}}{x^۲}$ کدام است؟ ۱۳۹۳

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۹۲
۲۳. اگر $\frac{۱}{۲} = \lim\limits_{x\to \frac{۱}{۶}^+} \frac{[۴\cos^۲ \pi x] - ۱۲x}{ax+b}$ **باشد، آنگاه** $a+b$ **کدام می باشد؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)**

۱) -۲۰ ۲) -۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۳۹۶
۲۴. حد عبارت $\frac{\sqrt{\cos ۳x} - \sqrt{\cos x}}{x^۲}$**، وقتی** $x \to ۰$ **کدام است؟**

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۸۵
۲۵. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱+\cos \pi x}{x^۳ - x^۲ - x + ۱}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۲}$

۱۳۹۴
۲۶. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} ([۲x] + [-۲x])\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}$ **، کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)**

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

۱۳۹۲
۲۷. اگر $۲^a = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}$ **باشد، آنگاه** a **کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۹۷
۲۸. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱-\tan^۲ x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}$ **، کدام است؟**

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۳۹۲
۲۹. حاصل $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x}$ **، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۹۱
۳۰. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۰

۱۳۸۲
۳۱. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\sin x + \sin ۳x}$ **برابر کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۸۵
۳۲. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x - \tan ۳x}{\sqrt{۱-\cos x}}$ **برابر کدام است؟**

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۳۸۱
۳۳. حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{(۲-\sqrt{x})}{\cot \frac{\pi x}{۸}}$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۴. حاصل $\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x-\sin ۳x}{\sqrt{۲+۲\cos x}}$ ، کدام است؟ ۱۳۹۷

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۵. حدّ عبارت $\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]-\cos x[\sin ۲x]$، وقتی $x\to\pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.) ۱۳۹۵

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حدّ ندارد.

۳۶. حاصل $\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۱-\tan\pi x}{۲x-\sqrt{x}}$ کدام است؟ ۱۳۹۱

۱) -۲π ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) ۲π

۳۷. حاصل $\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۲-۲\cos x}}$ کدام است؟ ۱۴۰۱

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳۸. فرض کنید $a=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sin(\sqrt{۱-x^۳}-۱)-۲\tan[x]}{x^n(۱-\cos(\sqrt{۳x}))}$ ، باشد. مقدار a^n، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.) ۱۴۰۰

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۹. فرض کنید $a=\lim_{x\to۰^+}\frac{tg^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)}{(۱-\cos(\sqrt{۲x}))^n}$ مقدار $a+n$ کدام است؟ ۱۴۰۰

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴}$

۴۰. حدّ عبارت $\frac{۱-\cos\sqrt{x}}{x}$، وقتی $x\to۰^+$ کدام است؟ ۱۳۹۶

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴۱. حاصل $\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟ ۱۳۸۳

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

۴۲. حدّ عبارت $[\tan^۲ x]+\cos ۳x[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]$، وقتی $x\to\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟ ([ ] به مفهوم جزء صحیح است.) ۱۳۹۵

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ . گزینه ۱

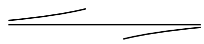
ابتدا حد تابع را در $\pm\infty$ بررسی می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است؛ حال تفاضل تابع و خط مجانب افقی را می‌یابیم.

$$y-۲=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}-۲=\frac{۲x^۲-x-۲-۲x^۲-۴x}{x^۲+۲x}=\frac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}$$

$$\begin{matrix} x\to+\infty\Rightarrow\dfrac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}<۰\Rightarrow y-۲<۰\Rightarrow y<۲ \\ x\to-\infty\Rightarrow\dfrac{-۵x-۲}{x^۲+۲x}>۰\Rightarrow y-۲>۰\Rightarrow y>۲ \end{matrix}\Rightarrow$$



۲ . گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ $f+g$ را محاسبه نموده و سپس تابع $y=f+g$ را ایجاد می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} D_f=(۰,+\infty) \\ D_g=(۰,+\infty)-\{۱\} \end{matrix}\right\}\Rightarrow D_{f+g}=D_f\cap D_g=(۰,+\infty)-\{۱\}$$

$$(f+g)(x)=\frac{x+۱}{x+\sqrt{x}}+\frac{۱-x}{x-\sqrt{x}}=\frac{(x+۱)(x-\sqrt{x})+(۱-x)(x+\sqrt{x})}{x^۲-x}$$

$$=\frac{x^۲-x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-x^۲-x\sqrt{x}}{x(x-۱)}=\frac{۲x-۲x\sqrt{x}}{x(x-۱)}=\frac{۲x(۱-\sqrt{x})}{x(x-۱)}=\frac{۲(۱-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\frac{-۲}{\sqrt{x}+۱}$$

$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x)=۰\to y=۰$ **مجانب افقی**

مخرج ریشه ندارد پس مجانب قائم ندارد گزینهٔ ۲ صحیح است.

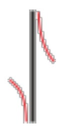
۳ . گزینه ۳

$$x^۳+x=۰\to x(x^۲+۱)=۰\to x=۰$$

توجه: برای بررسی رفتار یک تابع در اطراف مجانب قائم آن، باید حد چپ و راست تابع را به‌ازای ریشهٔ مخرج بیابیم.

$$\begin{cases} \lim_{x\to۰^+}\dfrac{x+۱}{x(x^۲+۱)}=\lim_{x\to۰^+}\dfrac{۱}{x(۱)}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty\ \to\ \text{یعنی از راست به خط } x=۰ \text{ نزدیک می شویم باید به‌سمت بالا برویم} \\ \lim_{x\to۰^-}\dfrac{x+۱}{x(x^۲+۱)}=\lim_{x\to۰^-}\dfrac{۱}{x(۱)}=\dfrac{۱}{۰^-}=-\infty\ \to\ \text{یعنی از چپ به خط } x=۰ \text{ نزدیک می شویم باید به‌سمت پایین برویم} \end{cases}$$

در نتیجه تابع در اطراف مجانب قائم به شکل زیر می باشد:



۴ . گزینه ۳ روش اول: ابتدا مجانب افقی تابع را به دست آورده و سپس معادلهٔ تقاطع منحنی و مجانب افقی را حل می‌کنیم تا طول نقطهٔ تقاطع به دست آید. داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲-۳x}{(x-۱)^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲-۳x}{x^۲-۲x+۱}\overset{\text{بزرگترین توان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

بنابراین $y=۲$ مجانب افقی تابع است. حال به حل معادلهٔ تقاطع منحنی و مجانب افقی می‌پردازیم:

$\dfrac{۲x^۲-۳x}{x^۲-۲x+۱}=۲\Rightarrow ۲x^۲-۳x=۲x^۲-۴x+۲\Rightarrow x=۲$ **طول نقطهٔ تقاطع**

خط $x=۱$ به‌عنوان مجانب قائم است، زیرا:

$\lim_{x\to۱}\dfrac{۲x^۲-۳x}{(x-۱)^۲}=\dfrac{-۱}{۰^+}=-\infty\Rightarrow x=۱$ **مجانب قائم**

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A به طول ۲ از خط $x=۱$ برابر است با: $d=|۲-۱|=۱$

روش دوم: در توابع کسری برای یافتن محل تلاقی نمودار تابع با مجانب افقی یا مایل، می‌توان صورت را بر مخرج تقسیم کرد و باقی‌مانده را به دست آورد. با مساوی صفر قرار دادن عبارت باقی‌مانده، طول نقطهٔ تلاقی (در صورت وجود) به دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x & \dfrac{x^2-2x+1}{2} \\ \vdots & \\ \hline x-2 & \end{array}$$

طول نقطهٔ تلاقی ۲ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

۵ . گزینه ۱

ضابطهٔ $f-g$ را تشکیل داده و با توجه به آن، مجانب‌ها را می‌یابیم.

$$f(x)-g(x)=\frac{x+11}{(x-4)(x+1)}-\frac{3}{x-4}=\frac{-2(x-4)}{(x+1)(x-4)}=\frac{-2}{x+1}$$

$$\begin{cases} \text{مجانب قائم: } x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \Rightarrow (-1,0) \text{ محل برخورد} \\ \text{مجانب افقی: } \quad y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{x+1}=0 \end{cases}$$

۶ . گزینه ۲

ابتدا مجانب افقی این منحنی را می‌یابیم و برابر عدد $\frac{3}{2}$ قرار می‌دهیم تا مقدار A مشخص شود.

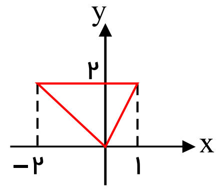
$$\lim_{x\to\infty} y=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{A}{A-1}=\frac{3}{2} \Rightarrow A=3 \Rightarrow f(x)=\frac{3x^3+1}{2x^3+16}$$

مجانب قائم = ریشهٔ مخرج $\Rightarrow 2x^3+16=0 \Rightarrow x=-2$

۷ . گزینه ۱ ضابطهٔ $(g-f)(x)$ را تشکیل داده و با توجه به آن، مجانب‌ها را می‌یابیم.

$$y=g-f=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+x}{x+2} \Rightarrow y=\frac{2x^2+x}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow x=1, x=-2 \text{ مجانب‌های قائم}$$

$$y=2 \text{ مجانب افقی} \to S=\frac{2\times 3}{2}=3 \text{ مجانب‌های قائم}$$



۸ . گزینه ۱

$$f(x)=\frac{|ax+1|+2x}{|x|+b}$$

چون تابع f دو مجانب قائم دارد، پس مخرج باید دارای دو ریشه باشد:

$$|x|+b=0 \Rightarrow |x|=-b \Rightarrow -b>0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow x=\pm(-b) \Rightarrow x=\pm b$$

حد تابع در $\pm\infty$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|ax+1|+2x}{|x|+b}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|ax|+2x}{|x|}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|a||x|+2x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|a|x+2x}{x}=|a|+2, \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-|a|x+2x}{-x}=|a|-2$$

چون $-b>0, |a|+2>0$، طبق فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|a|+2=-b\\ |a|-2=b\end{array}\right\} \Rightarrow 2|a|=0 \Rightarrow a=0, b=-2$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{|x|-2} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{|x|-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

۹ . گزینه ۱

چون نقطهٔ $A(-\frac{1}{2},3)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع $y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$ است، پس $y=3$ مجانب افقی و $x=\frac{-1}{2}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2}{4x^2}=\frac{b}{4}=3 \to b=12$$

$$4x^2+ax+1=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 4\times\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+1=0 \Rightarrow 2=\frac{a}{2} \Rightarrow a=4$$

$$\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$$

۱۰ . گزینه ۱ برای محاسبهٔ مجانب افقی باید از تابع حد در بی‌نهایت بگیریم و برای محاسبهٔ مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را می‌یابیم. چون $x=-2$ و $x=1$ خطوط مجانب قائم هستند بنابراین ریشه‌های مخرج محسوب می‌شوند.

$$\text{مجانب قائم}: \begin{cases} x=۱ \xrightarrow{\text{مخرج}} a+b+c=۰ \quad (۱) \\ x=-۲ \xrightarrow{\text{مخرج}} ۴a-۲b+c=۰ \quad (۲) \end{cases}$$

$$\text{مجانب افقی}: \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c} \overset{\text{پرتوان}}{=\!=} \lim \frac{-۲x^۲}{ax^۲} = -\frac{۲}{a} = -۱ \Rightarrow a=۲$$

$$a=۲ \xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} b+c=-۲ \\ -۲b+c=-۸ \end{cases} \Rightarrow b=۲ \quad , \quad c=-۴$$

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی}} f(x)=\frac{-۲x^۲+۳x}{۲x^۲+۲x-۴} \Rightarrow f(-۱)=\frac{-۵}{۲-۲-۴}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

۱۱ . گزینه ۴ ریشه‌های مخرج مجانب قائم محسوب می‌شوند لذا $x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰ , ۲$ دو مجانب قائم تابع می‌باشند.

از طرفی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=۱$ لذا $y=۱$ نیز مجانب افقی تابع خواهد بود.

۱۲ . گزینه ۱ ابتدا دقت کنید که:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{x^۳}{x\times ۴x^۲}=\frac{۱}{۴}$$

پس $y=\frac{۱}{۴}$ مجانب افقی تابع است. بنابراین باید تابع تنها یک مجانب قائم داشته باشد. مجانب‌های قائم را در ریشه‌های مخرج جست‌وجو می‌کنیم. دقت کنیم که:

$$(x-a)(۴x^۲-۴x+۱)=۰ \Rightarrow (x-a)(۲x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=a\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

پس باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱) $a=\frac{۱}{۲}$ که در این صورت $x=\frac{۱}{۲}$ تنها مجانب قائم است.

۲) $x=a$ ریشهٔ صورت هم باشد:

$$a^۳-۵a+۴=۰ \Rightarrow a^۳-a-۴a+۴=۰ \Rightarrow a(a-۱)(a+۱)-۴(a-۱)=۰ \Rightarrow (a-۱)(a^۲+a-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \\ a^۲+a-۴=۰ \\ \xrightarrow[a\neq ۱]{\Delta=\sqrt{۱۷}>۰} a_۲+a_۳=-۱ \end{cases}$$

از اینجا سه مقدار برای a به‌دست می‌آید که مجموع آنها $۱-۱=۰$ است.

۳) $x=\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مضاعف صورت باشد و $x=a$ تنها مجانب قائم باشد که چنین چیزی نیست. بنابراین برای a چهار مقدار به‌دست می‌آید که مجموع آنها $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۳ . گزینه ۴

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۳-bx^۲+۲}{ax^۳-bx+۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۳}{ax^۳}=۱$$

تابع یک مجانب افقی به‌صورت $y=۱$ دارد چون فقط در دو نقطه ناپیوسته است و دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. در واقع باید مخرج دو ریشه داشته باشد که یکی از آنها ریشهٔ مشترک با صورت است و به‌عنوان یک نقطهٔ ناپیوستگی (نه مجانب) باشد. این ریشه را به دست می‌آوریم.

$$ax^۳-bx^۲+۲=ax^۳-bx+۲ \Rightarrow bx^۲=bx \Rightarrow bx^۲-bx=۰ \Rightarrow bx\cdot(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \quad \text{غ ق ق} \\ x=۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۱\ \text{ریشهٔ مخرج}} a-b+۲=۰ \Rightarrow b=a+۲$$

$$f(x)=\frac{ax^۳-(a+۲)x^۲+۲}{ax^۳-(a+۲)x+۲}=\frac{ax^۲\cdot(x-۱)-۲(x-۱)(x+۱)}{ax\cdot(x^۲-۱)-۲(x-۱)}=\frac{ax^۳-ax^۲-۲x^۲+۲}{ax^۳-ax-۲x+۲}=\frac{(x-۱)(ax^۲-۲x-۲)}{(x-۱)(ax^۲+ax-۲)}$$

در نتیجه عبارت $ax^۲+ax-۲$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\xrightarrow{\Delta=۰} a^۲+۸a=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \quad \text{غ ق ق} \\ a=-۸ \Rightarrow b=-۶ \end{cases}$$

۱۴ . گزینه ۲ می‌دانیم اگر $x=k$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، آنگاه:

$$ax^۲+bx+c=a\cdot(x-k)^۲$$

چون $x=۲$ تنها مجانب قائم این منحنی است پس ریشهٔ مضاعف مخرج می‌باشد. پس:

$$۲x^۲+bx+c=۲(x-۲)^۲=۲x^۲-۸x+۸ \rightarrow b=-۸\ ,\ c=۸$$

بازنویسی: $f(x)=\dfrac{ax^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸} \rightarrow f(۳)=۶ \rightarrow f(۳)=\dfrac{۹a+۲۱}{۲}=۶ \rightarrow a=-۱ \rightarrow$ بازنویسی : $f(x)=\dfrac{-x^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}$

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^۲+۷x}{۲x^۲-۸x+۸}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^۲}{۲x^۲}=-\dfrac{۱}{۲}$

خط $y=-\frac{۱}{۲}$ خط مجانب افقی است.

۱۵ . گزینه ۱ حد تابع به‌ازای $x\to\infty$، مجانب افقی تابع را به دست می‌دهد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-۲x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}=\lim_{x\to\infty}\frac{-۲x^۲}{ax^۲}=\frac{-۲}{a}=-۱\Rightarrow a=۲$$

از طرفی $x=۱$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم تابع‌اند، پس مخرج به‌صورت زیر است:

$$ax^۲+bx+c\xrightarrow{a=۲}۲(x+۲)(x-۱)$$

در نتیجه داریم:

$$f(-۱)=\frac{-۲(-۱)^۲+۳(-۱)}{۲(-۱+۲)(-۱-۱)}=\frac{-۲-۳}{۲(۱)(-۲)}=\frac{۵}{۴}=۱٫۲۵$$

۱۶ . گزینه ۲ ابتدا براکت را به عدد تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)(۱+\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}$$

$$\lim_{x\to۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۱-(-۱)=۲$$

۱۷ . گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}\times\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+\cos x}}\times\frac{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۲+۳x}+\sqrt{۲-x}}=\lim_{x\to۰^-}\frac{(۲+۳x-۲+x)(\sqrt{۲})}{(\sqrt{۱-\cos^۲x})(۲\sqrt{۲})}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۴x}{۲|\sin x|}=\lim_{x\to۰^-}\frac{۲x}{-\sin x}=-۲$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim_{u\to۰}(۱-\cos u)\sim\frac{u^۲}{۲}$ است.

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{\frac{x^۲}{۲}}}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}|\underbrace{x}_{-}|}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۰^-}\frac{\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۲+۳x}}-\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۲-x}}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\frac{۴}{۲\sqrt{۲}}}{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=-۲$$

۱۸ . گزینه ۴ مخرج کسر را با کمک اتحاد $\sin^۲x=۱-\cos^۲x$ و سپس دو مرتبه استفاده از اتحاد مزدوج تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱-\sqrt{\cos x})}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱-\sqrt{\cos x})}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=\frac{۱}{۲\times۲}=\frac{۱}{۴}$$

۱۹ . گزینه ۲ با توجه به اینکه $(x\to۰^+\Rightarrow\sin x<x)$ داریم $\lim_{x\to۰^+}\frac{\sin x}{x}=۱^-$ و می‌دانیم که حاصل $[۱^-]$ عدد صفر مطلق است و $۰\times\infty=۰$ مطلق $\lim_{x\to۰^+}\left[\frac{\text{Sin}\,x}{x}\right]\cot x=۰$، .

۲۰ . گزینه ۲ راه حل اول: کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$lim_{x\to۰}\frac{\cos^۲x-\sqrt{\cos x}}{x^۲}\times\frac{\cos^۲x+\sqrt{\cos x}}{\cos^۲x+\sqrt{\cos x}}=lim_{x\to۰}\frac{\cos^۴x-\cos x}{x^۲(\cos^۲x+\sqrt{\cos x})}=lim_{x\to۰}\frac{\cos x(\cos^۳x-۱)}{x^۲(\cos^۲x+\sqrt{\cos x})}=lim_{x\to۰}\frac{\cos x(\cos x-۱)(\cos^۲x+\cos x+۱)}{x^۲(\cos^۲x+\sqrt{\cos x})}$$

$$=lim_{x\to۰}\frac{\cos x(-۲\sin^۲\frac{x}{۲})(\cos^۲x+\cos x+۱)}{x^۲(\cos^۲x+\sqrt{\cos x})}=lim_{x\to۰}\frac{-۲\times\frac{x^۲}{۴}}{x^۲}\times\frac{\cos x(\cos^۲x+\cos x+۱)}{\cos^۲x+\sqrt{\cos x}}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

راه حل دوم:

بهترین روش محاسبهٔ این حد استفاده از هم‌ارزی $\cos x=۱-\frac{x^۲}{۲}$ است:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\cos^۲x-\sqrt{\cos x}}{x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱-\frac{x^۲}{۲})^۲-\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۲}}}{x^۲}$$

حال به کمک هم‌ارزی برنولی صورت را ساده می‌کنیم ($(۱+x)^r=۱+rx$ وقتی $x\to۰$)

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-۲\times\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{x^۲}{۲})}{x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{(-۱+\frac{۱}{۴})x^۲}{x^۲}=\frac{-۳}{۴}$$

۲۱ . گزینه ۴ کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم و مخرج را به‌صورت اتحاد مربع می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\cos\pi x}{(\sqrt{x}-2)^2}\times\frac{1+\cos\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to 4}\frac{1-\cos^2\pi x}{(\sqrt{x}-2)^2(2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sin^2\pi x}{2(\sqrt{x}-2)^2}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{2}(\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-2})^2=\lim_{x\to 4}\frac{1}{2}(\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2})^2=\lim_{x\to 4}\frac{1}{2}(\frac{4\sin\pi x}{x-4})^2$$

$$\xrightarrow{x-4=t\to x=t+4},\lim_{x\to 4}\frac{1}{2}\frac{(4\sin\pi(t+4))^2}{t}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{2}\frac{(4\sin\pi t)^2}{t}=\frac{1}{2}(16\times\pi^2)=8\pi^2$$

۲۲ . گزینه ۴

راه حل اول: صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2(1+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}-(1-2\sin^2\frac{5x}{2})}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{4}-\frac{x^2}{4}}{x^2}=6$$

راه‌حل دوم: با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{-5\,\mathrm{Sin}\,5x}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{2}+\frac{5(5x)}{2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{24}{2}x}{2x}=6$$

۲۳ . گزینه ۱

برای به دست آوردن این حد ابتدا باید مقدار $[4\cos^2\pi x]$ را در همسایگی راست $x=\frac{1}{6}$ به دست آوریم، می‌دانیم تابع $\cos x$ و $\cos^2 x$ در ربع اول نزولی است:

$$x\to(\frac{1}{6})^+\Rightarrow\cos\pi x<\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos^2\pi x<\frac{3}{4}\Rightarrow 4\cos^2\pi x<3\Rightarrow[4\cos^2\pi x]=[3^-]=2$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$$

صورت کسر در $x=\frac{1}{6}$ صفر است و حاصل حد مقداری غیرصفر، بنابراین مخرج نیز باید در $x=\frac{1}{6}$ صفر شود:

$$a(\frac{1}{6})+b=0$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{-6bx+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2(1-6x)}{b(1-6x)}=\frac{2}{b}$$

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=4\Rightarrow a=-24\Rightarrow a+b=-20$$

۲۴ . گزینه ۱ صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2(1+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{3x}{2}-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{3x}{2}}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}-\frac{9x^2}{4}}{x^2}=-2$$

۲۵ . گزینه ۳ مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم تا عبارت $x-1$ ظاهر شود و سپس با تعویض متغیر $x-1=t$، حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2(x-1)-(x-1)}\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{(x-1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}\;x-1=t\to x=t+1,\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos\pi(t+1)}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{t^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi t}{2}}{t^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2(\frac{\pi t}{2})^2}{t^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\times\frac{\pi t}{4}}{t^2}=\frac{\pi^2}{4}$$

۲۶ . گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\lim_{u\to 0}\sqrt[n]{1+u}\simeq 1+\frac{u}{n}\quad \text{و}\quad \lim_{u\to 0}(1-\cos^n u)\simeq\frac{u^2}{2}\times n\quad \text{و}\quad \lim_{x\to 0}[f(x)]+[-f(x)]=-1$$

$$\lim_{x\to 0}([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos^3 x)}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{(1+\sqrt{1+x^2})}{(1+\sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3(2\sin^2\frac{x}{2})\times(2)}{1-1-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\times 2\times\frac{x^2}{4}\times 2}{-x^2}=3$$

۲۷ . گزینه ۲

راه اول: می دانیم: $\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$

عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x})\cdot(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}{(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})\times(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos x-\sin x)\cdot(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\times\sqrt{2}}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=2^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow 2^{-\frac{1}{4}}=2^a\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

راه دوم: می‌دانیم: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ **و هر دو در** $x=a$ **مشتق‌پذیر باشند آنگاه روش هوپیتال برای رفع ابهام** $\frac{0}{0}$ **به‌قرار زیر است:**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}\qquad H:\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}})$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}}}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}}=(2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{4}}=2^a\to a=-\frac{1}{4}$$

۲۸ . گزینه ۱ با عددگذاری به ابهام $\frac{0}{0}$ **می‌رسیم و به کمک فرمول‌های مثلثاتی تابع را ساده‌تر می‌کنیم.**

می‌دانیم: $\boxed{1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2}$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi^-}{4}}\frac{1-\tan^2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{3\pi^-}{4}}\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}=\lim_{x\to\frac{3\pi^-}{4}}\frac{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{|\sin x+\cos x|}$$

توجه: به‌ازای $\frac{3\pi^-}{4}$ **حاصل عبارت** $\sin x+\cos x$ **همواره مثبت است چون در ناحیهٔ دوم هرچقدر زاویه کوچک‌تر می‌شود اندازهٔ سینوس و کسینوس مثبت‌تر و بزرگ‌تر می‌شود.**

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)\cdot\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cos^2x\cdot\cancel{(\sin x+\cos x)}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

۲۹ . گزینه ۱ در هم‌ارزی‌های مثلثاتی می‌دانیم $\lim_{u\to 0}\sin u\sim u$:

$$\lim_{x\to x}\frac{1+\cos x}{1-2\cos 2x}\xrightarrow[x-\pi=t]{x-\pi=t}\lim_{x\to x}\frac{1+\cos(\pi+t)}{1-\cos(2\pi+2t)}=\lim_{x\to x}\frac{1-\cos t}{1-\cos 2t}=\lim_{x\to x}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin^2 t}=\lim_{x\to x}\frac{\frac{t^2}{4}}{t^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to\pi}\sin(1+\cos x)\sim 1+\cos x,\lim_{x\to 0}sin\sim x$$

۳۰ . گزینه ۱ روش اول: می‌دانیم: $\lim_{u\to 0}(1-\cos u)\simeq\frac{u^2}{2}$ **و** $\lim_{u\to 0}\sin u\simeq u$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cdot\cos x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\times\frac{x^2}{2}}{x^3\times 1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}$$

راه دوم: روش هوپیتال: اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ **باشد و** f **و** g **در** $x=a$ **مشتق‌پذیر باشند آنگاه:** $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\text{مبهم}]{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}$$ مبهم

هم‌ارزی: $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{2}$$

۳۱. گزینه ۱

روش اول: با تغییر متغیر $t=x-\frac{\pi}{2}$ حد را برحسب t می‌نویسیم:

$$x=t+\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+t)}{\sin(\frac{\pi}{2}+t)+\sin(\frac{3\pi}{2}+3t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\cos t-\cos 3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{(1-\frac{t^2}{2})-(1-\frac{9t^2}{2})}=\frac{\frac{t^2}{2}}{4t^2}=\frac{1}{8}$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ و هر دو در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه روش هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به‌قرار زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}\qquad H:\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\sin x+\sin 3x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Longrightarrow}\frac{-\cos x}{\cos x+3\cos 3x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Longrightarrow}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{-\sin x-9\sin 3x}=\frac{+1}{-1+9}=+\frac{1}{8}$$

۳۲. گزینه ۱ در مخرج کسر از اتحاد $1-\cos u=2\sin^2\frac{u}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos 3x-\sin 3x}{\sqrt{2}\cos 3x|\sin\frac{x}{2}|}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\,\cancel{\cos 3x}}{\sqrt{2}\,\cancel{\cos 3x}\,\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin 3x}{\sqrt{2}\cos 3x\sin\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}-\frac{3x}{\sqrt{2}\times 1\times\frac{x}{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{-4\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$$

۳۳. گزینه ۳ صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم سپس از تغییر متغیر $t=x-4$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})}{\cot\frac{\pi x}{8}}=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})}{\cot\frac{\pi x}{8}}\times\frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{4\cot\frac{\pi x}{8}}\;,x-4=t\to x=t+4\;,\lim_{x\to 4}\frac{-t}{4\cot\frac{\pi(t+4)}{8}}=\lim_{x\to 4}\frac{-t}{4\cot(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{8})}=\lim_{x\to 4}\frac{-t}{-4\tan(\frac{\pi t}{8})}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{t}{4\times\frac{\pi t}{8}}=\frac{2}{\pi}$$

۳۴. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\boxed{1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}}$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x-\sin 3x}{\sqrt{2+2\cos x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x-\sin 3x}{\sqrt{2(1+\cos x)}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x-\sin 3x}{\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x-\sin 3x}{2\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$$

توجه: می‌دانیم وقتی $x\to\pi^+$ آنگاه کمان $\frac{x}{2}$ به‌صورت $\frac{\pi^+}{2}$ است که در ناحیهٔ دوم قرار دارد و کسینوس در ناحیهٔ دوم منفی است:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-\sin 3x}{-2\cos\frac{x}{2}}\xrightarrow{x-\pi=t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)-\sin(3\pi+3t)}{-2\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+\sin 3t}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{-t+3t}{2(\frac{t}{2})}=2$$

۳۵. گزینه ۱

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

$$x\to\pi^-:\ \sin\frac{\pi}{2}[0^+]-\cos\pi[0^-]=0-(-1)\cdot(-1)=-1$$
$$x\to\pi^+:\ \sin\frac{\pi}{2}[0^-]-\cos\pi[0^+]=(1)\times(-1)-0=-1$$

۳۶. گزینه ۱ با تبدیل $\tan\pi x=\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$ و استفاده از مزدوج مخرج و در ادامه مزدوج صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۱-\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}}{۲x-\sqrt{x}}\times\frac{(۲x+\sqrt{x})}{(۲x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{\cos\pi x-\sin\pi x(۱)}{(۴x^۲-x)\cos\pi x}\times\frac{(\cos\pi x+\sin\pi x)}{\cos\pi x+\sin\pi x}=\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{\cancel{\cos^۲\pi x-\sin^۲\pi x}\ \cos ۲\pi x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})\underbrace{\cancel{(۴x^۲-x)}}_{x(۴x-۱)}}\xrightarrow{x-\frac{۱}{۴}=t}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۲\pi(t+\frac{۱}{۴})}{(t+\frac{۱}{۴})(۴t)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin ۲\pi t}{\frac{۱}{۴}(۴t)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-(\frac{\sin ۲\pi t}{۲\pi t})\times ۲\pi t}{t}=-۲\pi$$

۳۷. گزینه ۳ در مزدوج صورت ضرب و تقسیم نموده و برای مخرج از فرمول $۱-\cos\alpha=۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۲(۱-\cos x)}}\times\frac{\sqrt{۲-۳x}+\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۲-۳x}+\sqrt{۲-۵x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲-۳x-۲+۵x}{\sqrt{۲\times ۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}\times\underbrace{(\sqrt{۲-۳x}+\sqrt{۲-۵x})}_{۲\sqrt{۲}}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲x}{۲|\sin\frac{x}{۲}|\times ۲\sqrt{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{|\frac{x}{۲}|\times ۲\sqrt{۲}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{-\frac{x}{۲}\times ۲\sqrt{۲}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۸. گزینه ۱ در یک همسایگی راست $x=۰$ داریم:

$$x\to ۰^+\ :\ \tan[x]=\tan[۰^+]=\tan ۰=۰$$

پس حد داده شده، چنین است:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin(\sqrt{۱-x^۳}-۱)}{x^n(۱-\cos\sqrt{۳x})}\ \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin(\sqrt{۱-x^۳}-۱)}{x^n(۲\sin^۲\frac{\sqrt{۳x}}{۲})}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۱-x^۳}-۱}{۲x^n\times(\frac{\sqrt{۳x}}{۲})^۲}\times\frac{\sqrt{۱-x^۳}+۱}{\sqrt{۱-x^۳}+۱}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-x^۳}{۲x^n\times\frac{۳x}{۴}\times ۲}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-x^۲}{۳x^n}$$

اگر حاصل حد، موجود و مخالف صفر باشد، باید $n=۲$ و در این صورت حاصل حد $-\frac{۱}{۳}$ است؛ پس $n=۲$ و $a=\frac{-۱}{۳}$ است و در نتیجه $a^n=\frac{۱}{۹}$. باید در صوت سؤال قید شود $a\neq ۰$.

۳۹. گزینه ۴ می‌دانیم: بنا به هم‌ارزی مثلثاتی:

$$\tan^n_{u\to ۰} u\simeq\lim_{u\to ۰}(u^n)\ \ ,\ \ \lim_{u\to ۰}(۱-\cos u)\simeq\lim_{u\to ۰}\frac{u^۲}{۲}$$

$$(۱)\ \ \underset{u\to ۰}{۱-\cos u}\sim\underset{u\to ۰}{\frac{u^۲}{۲}}\Rightarrow\underset{x\to ۰^+}{۱-\cos(\sqrt{۲x})}=\frac{(\sqrt{۲x})^۲}{۲}=x$$

(۲) پس داریم: $\underset{u\to ۰}{tg^۲u}\sim\underset{u\to ۰}{u^۲}\Rightarrow tg^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)\sim(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)^۲=(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲$

$$\lim_{u\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{۱-x^۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۱+\sqrt{۱-x^۲}})^۲}{x^n}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}(۱+\sqrt{۱-x^۲})})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{x^۲}{۲})^۲}{x^n}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۴}{۴x^n}=a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۴}\\ n=۴\end{cases}\Rightarrow a+n=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$$

۴۰. گزینه ۳ کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos\sqrt{x}}{x}\times\frac{(۱+\cos\sqrt{x})}{(۱+\cos\sqrt{x})}=\frac{۱-\cos^۲\sqrt{x}}{x(۱+\cos\sqrt{x})}\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{sin^۲\sqrt{x}}{x(۲)}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(\frac{\sin\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^۲}{۲x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{۲x}=\frac{۱}{۲}$$

۴۱. گزینه ۱ روش اول: با تغییر متغیر $t=x-\frac{۱}{۲}$ حد را برحسب t می‌نویسیم:

$$x-\frac{۱}{۲}=t\to x=t+\frac{۱}{۲}\to\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\cos\pi(t+\frac{۱}{۲})}{۱-\sqrt{۲(t+\frac{۱}{۲})}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\cos(\frac{\pi}{۲}+\pi t)}{۱-\sqrt{۲t+۱}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin\pi t}{۱-\sqrt{۲t+۱}}\times\frac{۱+\sqrt{۲t+۱}}{۱+\sqrt{۲t+۱}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin\pi t(۱+\sqrt{۲t+۱})}{۱-۲t-۱}$$

$$= \frac{\pi t(۲)}{-۲t} = -\pi$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = ۰$ و هر دو در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه روش هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ به‌قرارِ زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{۰}{۰} \qquad H: \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

نکته: در محاسبهٔ حد، هرگاه x به‌سمت ریشهٔ سادهٔ قدرِ مطلق میل کرد، ابتدا قدرِ مطلق را تعیین علامت و سپس حاصل حد را می‌یابیم.

$$x \to (\frac{۱}{۲})^+ : x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \text{ربع دوم } \pi x \Rightarrow \cos \pi x < ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}} = \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-\cos \pi x}{۱-\sqrt{۲x}} = \frac{۰}{۰} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{\pi \sin \pi x}{-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}} = -\pi$$

۴۲ . گزینه ۳

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

چون $x = \frac{\pi}{۳}$ داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند باید حد چپ و حد راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^-} [\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x + [\tan^۲ x] = [-۱)(-۱) + ۲ = ۳$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^+} f(x) = [۰^+] \times (-۱) + [۳^+] = ۳$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۷	۱	۱۳	۴	۱۹	۲	۲۵	۳	۳۱	۱	۳۷	۳
۲	۲	۸	۱	۱۴	۲	۲۰	۲	۲۶	۲	۳۲	۱	۳۸	۱
۳	۳	۹	۱	۱۵	۱	۲۱	۴	۲۷	۲	۳۳	۳	۳۹	۴
۴	۳	۱۰	۱	۱۶	۲	۲۲	۴	۲۸	۱	۳۴	۴	۴۰	۳
۵	۱	۱۱	۴	۱۷	۱	۲۳	۱	۲۹	۱	۳۵	۱	۴۱	۱
۶	۲	۱۲	۱	۱۸	۴	۲۴	۱	۳۰	۱	۳۶	۱	۴۲	۳