مشتق

مشتق عبارات مثلثاتی

عبارات مثلثاتی را تا حد امکان ساده کنید و سپس از روابط زیر استفاده کنید

$y=\sin ax$	$y'=a\cos ax$
$y=\cos ax$	$y'=-a\sin ax$
$y=\tan ax$	$y'=a(1+\tan^2 ax)=\dfrac{a}{\cos^2 ax}$
$y=\cot ax$	$y'=-a(1+\cot^2 ax)=\dfrac{-a}{\sin^2 ax}$

چند مثال حل شده ببینید:

$$f(x)=\sin x\tan x \Rightarrow f'(x)=(\cos x)\tan x+(1+\tan^2 x)\sin x$$

$$f(x)=\frac{5\cos x}{1-\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{(-5\sin x)(1-\sin x)-(0-\cos x)(5\cos x)}{(1-\sin x)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-5\sin x+5\sin^2 x+5\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{5-5\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{5}{1-\sin x}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\cos x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos x+(-\sin x)\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}\sin x$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+x}{2x^2\sin x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1)(2x^2\sin x)-(4x\sin x+2x^2\cos x)(x+\sqrt{x})}{(2x^2\sin x)^2}$$

مشتق عبارات مثلثاتی توان دار:

$y=\sin^n u$	$y'=nu'\cos u\sin^{n-1}u$
$y=\cos^n u$	$y'=-nu'\sin u\cos^{n-1}u$

۱) $f(x)=(x^7-\sin x+3x)^6$

با فرض $u=x^7-\sin x+3x$ داریم:

$$f(x)=u^6\Rightarrow f'(x)=6u'u^5=6(7x^6-\cos x+3)(x^7-\sin x+3x)^5$$

۲) $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$

اگر فرض کنیم $u=\sqrt[3]{x}$ داریم:

$$f(x)=\sin u\Rightarrow f'(x)=u'\cos u=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}$$

۳) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x}$

فرض کنیم $\sin x=u$ پس:

$$f(x)=\sqrt[3]{u}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

۴) $f(x)=\tan^2 x$

فرض می‌کنیم $u=\tan x$ پس داریم:

$$f(x)=u^2\Rightarrow f'(x)=2uu'=2\tan x(1+\tan^2 x)$$

۵) $f(x)=\cos^3 x^3$

ابتدا فرض می‌کنیم $u=\cos x^3$ پس داریم:

$$f(x)=u^3\Rightarrow f'(x)=3u^2u'=(3\cos^2 x^3)u'$$

و برای محاسبهٔ u' باز فرض می‌کنیم $v=x^3$ پس داریم:

$$u'=(\cos x^3)'=(\cos v)'=-v'\sin v=-3x^2\sin x^3$$

پس داریم:

$$f'(x)=(3\cos^2 x^3)(-3x^2\sin x^3)$$

۱۴۰۱
۱. در بازه $\left[\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}\right]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos ۲x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۹۱
۲. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۱+a\cos\pi x & ; \quad x>۱ \\ bx^۲+x & ; \quad x\leq ۱\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $-\frac{۱}{۲}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۹۵
۳. امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۳}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

(۱) ۰٫۱۵ (۲) ۰٫۲ (۳) ۰٫۲۵ (۴) ۰٫۳

۱۳۹۴
۴. اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع $f(x)=[۲+\cos\frac{x}{۲}]\sin ۲x$ در $x=\pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

(۱) $\frac{۱}{۹}$ (۲) $\frac{۱}{۵}$ (۳) $\frac{۲}{۹}$ (۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۳۸۳
۵. تابع $f(x)=x[\sin x]$ روی بازه $(-\pi, \frac{\pi}{۲})$ کدام وضعیت را دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

(۱) پیوسته - مشتق‌پذیر (۲) ناپیوسته - مشتق‌پذیر (۳) پیوسته - مشتق‌ناپذیر (۴) ناپیوسته - مشتق‌ناپذیر

۱۳۹۶
۶. اگر θ زاویهٔ بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه نمودار تابع $y=\frac{|x-۱|}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۴}{۳}$ (۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۳۸۸
۷. اگر $f(x)=\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin^۲ x}$، مقدار $f(\frac{\pi}{۴})-۳f'(\frac{\pi}{۴})$ برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۹۸
۸. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$، کدام است؟

(۱) $-\sin a$ (۲) $-\cos a$ (۳) $\cos a$ (۴) $\sin a$

۱۳۹۱
۹. اگر $g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}$ و $f(x)=\sin^۲\pi x$ مشتق تابع fog به‌ازای $x=۲$ کدام است؟

(۱) $\frac{۳}{۴}$ (۲) $\frac{۵}{۸}$ (۳) $\frac{۳}{۴}\pi$ (۴) $\frac{۵}{۸}\pi$

۱۳۹۷
۱۰. خط قائم بر نمودار $f(x)=\frac{\cos ۲x}{۲-\sin x}$، در نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها، نیمساز ناحیهٔ اول را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۱) ۰٫۱ (۲) ۰٫۲ (۳) ۰٫۳ (۴) ۰٫۵

۱۱. اگر $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin(\pi x)$، شیب خط مماس بر نمودار تابع gof در نقطهٔ تلاقی آن با محور xها، روی بازهٔ $(۰ \ , \ \pi)$ کدام است؟

۱۳۸۷
(۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{۲}$ (۳) π (۴) صفر

۱۲. اگر $f(x)=\sin x$، مقدار مشتق تابع $\frac{fof}{f^{۲}}$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟ ۱۳۸۲

(۱) صفر (۲) $\sin ۱$ (۳) $\cos ۱$ (۴) ۱

۱۳. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ، ضابطهٔ مشتق تابع $y=f(\tan x)$ با شرط $|x|<\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟ ۱۳۸۵

(۱) $\frac{۱}{\sin x}$ (۲) $\frac{۱}{\cos x}$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۱۴. اگر $f(x)=\sin^{۲}\pi x-\frac{۱}{۲}\cos\pi x$، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x=\frac{۱}{۳}$ ، چند برابر $۳\sqrt{۳}$ است؟ ۱۳۸۹

(۱) $\frac{\pi}{۸}$ (۲) $\frac{\pi}{۴}$ (۳) $\frac{\pi^{۲}}{۸}$ (۴) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$

۱۵. از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}+۲$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر $f^{-۱}$ رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(۲\alpha)$، کدام است؟ ۱۴۰۰

(۱) $\frac{۷}{۱۵}$ (۲) $\frac{۸}{۱۵}$ (۳) $\frac{۲۲۵}{۲۸۹}$ (۴) $\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$

۱۶. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f\left(\sqrt{۱+\tan^{۲}x}\right)$ و $g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، مقدار $f'(۲)$، کدام است؟ ۱۳۹۹

(۱) $-\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) ۱

۱۷. اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\tan^{۲}x+\sqrt{۲}\cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۳}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ چقدر است؟ ۱۴۰۱

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\sqrt{۳}$ (۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۸. در نقطه تلاقی، منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازه $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ ۱۴۰۱

(۱) $\frac{\pi}{۴}-۱$ (۲) $\frac{\pi}{۴}-۳$ (۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۸}$ (۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۸}$

۱۹. در نمودار کدام تابع، دو خط قائم عمود بر هم، می‌توان یافت؟ ۱۳۹۷

(۱) $y=x\sqrt{x^{۲}+۱}$ (۲) $y=x+\sqrt{x^{۲}+۱}$ (۳) $y=\sin ۲x$ (۴) $y=\cos\frac{x}{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱ . گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط دو تابع داده‌شده در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\right]$ را می‌یابیم.

$$y=\sin x\cos ۲x\Rightarrow \frac{y(\frac{\pi}{۲})-y(\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi-\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱\times(-۱)-۰}{\frac{\pi}{۴}}=-\frac{۴}{\pi}$$

$$y=\sin^۴x-\cos^۴x=(\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱})(\sin^۲x-\cos^۲x)=\sin^۲x-\cos^۲x=-\cos ۲x$$

$$\frac{y(\frac{\pi}{۲})-y\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}=\frac{-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{-(-۱)+۰}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴}{\pi}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{-\frac{۴}{\pi}}{\frac{۴}{\pi}}=-۱$$

۲ . گزینه ۴ کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی کنیم:

۱) پیوستگی : $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=f(۱)\Rightarrow ۱+a\cos\pi=b+۱\Rightarrow ۱-a=b+۱\Rightarrow a=-b$

۲) مشتق‌پذیری: $f'_+(۱)=f'_-(۱)\Rightarrow -a\pi\sin\pi x\big|_{x=۱}=۲bx+۱\big|_{x=۱}\Rightarrow -a\pi\sin\pi=۲b+۱$

$$\Rightarrow ۲b+۱=۰\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

۳ . گزینه ۲ ابتدا مختصات نقطه‌ی تماس و بعد معادله‌ی خط مماس را می‌یابیم.

$$f(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳};f'_{(x)}=\frac{\cos x\cdot(۱+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(۱+\cos x)^۲}=\frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)^۲}=\frac{۱}{۱+\cos x}$$

$$m=f'(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

شیب خط مماس برابر $\frac{۲}{۳}$ است و شیب خط $y=x$ هم عدد ۱ است؛ بنابراین زاویه‌ی بین دو خط برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۲\cdot m_۲}\right|=\left|\frac{\frac{۲}{۳}-(۱)}{۱+\frac{۲}{۳}}\right|=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=۰/۲$$

۴ . گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را در یک همسایگی $x=\pi$ می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲\sin ۲x & ;\ x\le\pi\\ \sin ۲x & ;\ x>\pi\end{cases}$$

پس برای مشتق تابع داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۴\cos ۲x & ;\ x<\pi\\ ۲\cos ۲x & ;\ x>\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(\pi)=۴,f'_+(\pi)=۲$$

درنتیجه $\tan\theta$ را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

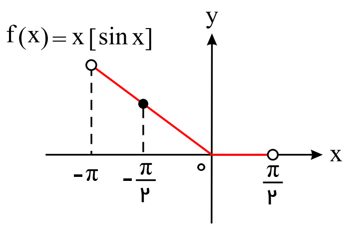
$$\tan\theta=|\frac{۴-۲}{۱+۴\times۲}|=\frac{۲}{۹}$$

۵ . گزینه ۳ راه اول: در بازه $(-\pi,\frac{\pi}{۲})$ نقاط $\{۰,-\frac{\pi}{۲}\}$ (نقاط مرز بین دو ناحیه مثلثاتی) باعث صحیح شدن عبارت داخل براکت می‌شوند، بنابراین فقط این دو نقطه را بررسی می‌کنیم:

در $x=۰$ پیوسته است چون عدد $x=۰$ ریشه ضریب جزء صحیح می‌باشد، اما مشتق‌پذیر نیست زیرا ریشهٔ مکرر نیست. همچنین $x=-\frac{\pi}{۲}$ مینیمم نسبی داخل براکت است و تابع در آن هم پیوسته و هم مشتق‌پذیر است؛ بنابراین فقط در $\{۰\}$ مشتق‌ناپذیر است.

راه دوم: رسم شکل

روی $(-\pi,\frac{\pi}{۲})$ پیوسته و در صفر مشتق‌ناپذیر است.



۶. گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $f(x)=g(x)\,|x-a|$ ، $x=a$ به شرطی که ریشهٔ $g(x)$ نباشد نقطهٔ گوشه برای تابع $f(x)$ است. بنابراین در تابع $y=\dfrac{|x-۱|}{\sqrt{x^۲+۳}}$ ، $x=۱$ گوشه است.

$$y=|x-۱|\,(\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}})\Rightarrow\begin{cases}y'(۱^+)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow m_۱=\dfrac{۱}{۲}\\ y'(۱^-)=\dfrac{-۱}{\sqrt{x^۲+۳}}=-\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow m_۲=-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

زاویهٔ بین دو خط مماس در نقطهٔ گوشه : $\tan\theta=\left|\dfrac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|=\left|\dfrac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}\right|=\dfrac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\dfrac{۴}{۳}$

۷. گزینه ۳ $f(\frac{\pi}{۴})$ به راحتی به‌دست می‌آید و داریم $f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}$ ، برای محاسبهٔ $f'(\frac{\pi}{۴})$ ابتدا ضابطهٔ تابع را کمی تغییر می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{\cos^۲x}{۱+\sin^۲x}=\frac{-\sin^۲x+۱}{\sin^۲x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-۱\times۱)-(۱\times۱)}{(\sin^۲x+۱)^۲}\times۲\sin x\cos x=\frac{-۴\sin x\cos x}{(\sin^۲x+۱)^۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{-۴\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}}{((\sin\frac{\pi}{۴})^۲+۱)^۲}=\frac{-۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{((\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+۱)^۲}=\frac{-۲}{\frac{۹}{۴}}=\frac{-۸}{۹}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۴})-۳f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}-۳\times\frac{-۸}{۹}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳$$

توجه: مشتق توابع به فرم $f(x)=\dfrac{au+b}{cu+d}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{au+b}{cu+d}\Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}u'_x$$

۸. گزینه ۳

می‌دانیم:
$$\lim_{a\to۰}\frac{f(x+a)-f(x)}{a}=f'(a)$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin a\cdot\cos x+\cos a\cdot\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$$

بنابه تعریف مشتق، این عبارت مشتق تابع $y=\sin x$ در نقطهٔ $x=a$ است.

$$=(\sin x)'(a)=\cos a$$

۹. گزینه ۴

می‌دانیم:
$$(\sin^۲u)'=۲u'\cdot\sin u\cdot\cos u=u'\cdot\sin ۲u$$

$$y=(fog)(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))\Rightarrow y'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))\quad(*)$$

$$g(۲)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵\times۲-۹}=\frac{۱}{۴}$$

$$f'(x)=\pi\sin۲\pi x\Rightarrow f'(g(۲))=f'(\frac{۱}{۴})=\pi\sin\frac{\pi}{۲}=\pi$$

$$g'(x)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲\sqrt{۵x-۹}}\Rightarrow g'(۲)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۲}=\frac{۵}{۸}$$

$$\xrightarrow{(*)}y'(۲)=\frac{۵}{۸}\times\pi=\frac{۵\pi}{۸}$$

۱۰. گزینه ۱ برای محاسبهٔ نقطهٔ تلاقی با محور yها باید $x=۰$ قرار دهیم.

مختصات نقطه: $f(۰)=\dfrac{\cos(۰)}{۲-\sin(۰)}=\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow(۰,\dfrac{۱}{۲})$

$$f'(x)=\frac{-۲\sin۲x\cdot(۲-\sin x)-(-\cos x)\cdot\cos۲x}{(۲-\sin x)^۲}$$

$$m=f'(۰)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow y-\frac{۱}{۲}=-۴(x-۰)$$

معادلهٔ خط قائم: $y-y_{۰}=-\dfrac{۱}{m}\cdot(x-x_{۰})$

پس خط قائم به‌صورت $y=-۴x+\frac{۱}{۲}$ است.

برای محاسبهٔ نقطهٔ برخورد این خط با نیم‌ساز ناحیهٔ اول باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} y=-۴x+\frac{۱}{۲} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow -۴x+\frac{۱}{۲}=x \Rightarrow ۵x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}$$

۱۱ . گزینه ۱ ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(\cos x)=\sin(\pi\cos x)$$

در نقطهٔ تلاقی gof با محور xها مقدار $(gof)(x)$ صفر می‌شود، پس داریم:

$$gof(x)=۰ \Rightarrow \sin(\pi\cos x)=۰ \Rightarrow \pi\cos x=k\pi$$
$$\xrightarrow[k\in Z]{-۱\leq\cos x\leq ۱} \cos x=k \quad ; \quad k=۰,۱,-۱$$

اگر $\cos x=۱$ یا -۱ باشد، معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ جواب ندارد. اما اگر $\cos x=۰$ باشد، آنگاه در فاصلهٔ $(۰,\pi)$، جواب $x=\frac{\pi}{۲}$ می‌شود؛ پس نقطهٔ تلاقی $(\frac{\pi}{۲}\ ,\ ۰)$ است.

برای محاسبهٔ شیب خط مماس کافی است مشتق را در این نقطه محاسبه کنیم:

$$(gof)'(x)=(-\pi\sin x)\cos(\pi\cos x) \Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{۲})=-\pi\sin\frac{\pi}{۲}\cos(\pi\cos\frac{\pi}{۲})=-\pi(\cos(۰))=-\pi$$

۱۲ . گزینه ۱

می‌دانیم:

$$y=\frac{u}{v} \to y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^۲}$$
$$y=\sin(u) \to y'=u'\cdot\cos u$$

$$\begin{cases} fof(x)=\sin(\sin x) \\ f^۲(x)=\sin^۲ x \end{cases} \Rightarrow y=\frac{\sin(\sin x)}{\sin^۲ x}$$

$$y'=\frac{\cos x\ \cos(\sin x)\sin^۲ x-۲\sin x\ \cos x\ \sin(\sin x)}{\sin^۴ x} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

۱۳ . گزینه ۲

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow f'(\tan x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$$

$$(f(\tan x))'=(۱+\tan^۲ x)f'(\tan x)=(۱+\tan^۲ x)\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}=\sqrt{۱+\tan^۲ x}$$

$$=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{\cos x}$$

توجه کنید که در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ عبارت $\cos x$ مثبت است.

۱۴ . گزینه ۳

می‌دانیم:

$$y=f(g(x)) \to y'=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$y=f(f(x)) \Rightarrow y'=f'(x)\cdot f'(f(x)) \Rightarrow y'(\frac{۱}{۳})=f'(\frac{۱}{۳})f'(f(\frac{۱}{۳})) \quad (I)$$

اکنون حاصل $f(\frac{۱}{۳})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sin^۲\pi x-\frac{۱}{۲}\cos\pi x \Rightarrow f(\frac{۱}{۳})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(I)} y'(\frac{۱}{۳})=f'(\frac{۱}{۳})f'(\frac{۱}{۲}) \quad (II)$$

$$f(x)=\sin^۲\pi x-\frac{۱}{۲}\cos\pi x \Rightarrow f'(x)=۲\pi\sin\pi x\cos\pi x+\frac{\pi}{۲}\sin\pi x$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\frac{۱}{۳})=۲\pi\sin\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳\pi\sqrt{۳}}{۴} \\ f'(\frac{۱}{۲})=۲\pi\sin\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}=۰+\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(II)} y'(\frac{۱}{۳})=\frac{۳\pi^۲\sqrt{۳}}{۸} \\ =(۳\sqrt{۳})(\frac{\pi^۲}{۸}) \end{array}$$

بنابراین مشتق تابع y در $x=\frac{۱}{۳}$، $\frac{\pi^۲}{۸}$ برابر $۳\sqrt{۳}$ است.

۱۵ . گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی است؛ پس وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند:

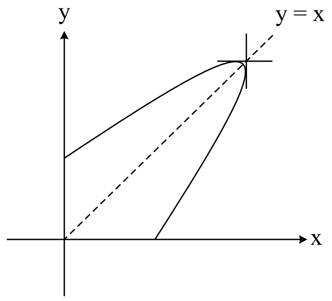
$$\begin{cases} y=\sqrt{x}+۲ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{x}+۲ \Rightarrow x-\sqrt{x}-۲=۰ \Rightarrow (\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}-۲)=۰ \Rightarrow \sqrt{x}-۲=۰ \Rightarrow x=۴$$

پس نقطهٔ تلاقی $(۴\ ,\ ۴)$ است. شیب خط مماس بر منحنی f در $x=۴$ برابر $f'(۴)$ است:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم:

$$f(x)=y=\sqrt{x}+2 \Rightarrow y-2=\sqrt{x}\Rightarrow x=(y-2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(x)=2(x-2)\Rightarrow (f^{-1})'(4)=4$$



پس شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطهٔ $(4\ ,\ 4)$ برابر ۴ است. می‌دانیم شیب یک خط برابر تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور xهاست. اگر زاویهٔ بین این دو مماس و محور xها را به‌ترتیب α_1 و α_2 و زاویهٔ بین این دو مماس را α بنامیم، داریم:

$$\alpha=\alpha_2-\alpha_1 \Rightarrow \tan\alpha=\tan(\alpha_2-\tan\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\tan\alpha_1}=\frac{4-\frac{1}{4}}{1+4\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{15}{4}}{2}=\frac{5}{8}$$

بنابراین:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{15}{8}}{1+\frac{225}{64}}=\frac{240}{289}$$

۱۶ . گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\boxed{1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}}\ ,\ \boxed{(f(u))'=u'\cdot f'(u)}$$

$$g(x)=f(\sqrt{1+\tan^2 x})=f(\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}})=f(|\frac{1}{\cos x}|)\xrightarrow{\text{ناحیه اول}} g(x)=f(\frac{1}{\cos x})\Rightarrow g'(x)=(\frac{1}{\cos x})'\cdot f'(\frac{1}{\cos x})\Rightarrow g'(x)=\frac{0-(-\sin x)}{\cos^2 x}\cdot f'(\frac{1}{\cos x})$$

$$\Rightarrow g'(\frac{\pi}{3})=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}}\times f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 4f'(2)=1\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$$

۱۷ . گزینه ۴ از طرفین رابطهٔ داده‌شده، مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=f(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)$$

$$g'(x)=(2(1+\tan^2 x)\tan x-\sqrt{2}\sin x)f'(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)$$

$$g'(\frac{\pi}{4})=(2+(1+\tan^2\frac{\pi}{4})\tan\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})F'(\tan^2\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3})$$

$$\sqrt{3}=(2\times 2\times 1-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})f'(1+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=(4-1)f'(1+1)\Rightarrow\sqrt{3}=3f'(2)\Rightarrow f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۸ . گزینه ۲ ابتدا نقطه تلاقی منحنی‌های f و g را می‌یابیم:

$$f(x)=g(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x\Rightarrow\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin x\Rightarrow\sin x=\cos x$$

$$\Rightarrow\frac{\sin x}{cosx}=\frac{\cos x}{cosx}\Rightarrow\tan x=1\xrightarrow{0\le x\le\pi}x=\frac{\pi}{4}$$

حال معادلهٔ خط مماس بر $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ را در $x=\frac{\pi}{4}$ می‌یابیم:

$$f(\frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۲}\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow A(\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۴})$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{۱}{۲}\sin x \to f'(\frac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۴}}{۴} \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$y - \frac{۳\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}(x - \frac{\pi}{۴}) \xrightarrow{y=۰} -\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}(x - \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x - \frac{\pi}{۴} = -۳$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{۴} - ۳$$

۱۹ . گزینه ۳ وقتی دو خط برهم عمود باشند باید حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها عدد ۱− شود یعنی باید بررسی شود که در کدام گزینه $y'_۱ \cdot y'_۲ = -۱$ می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱) $y' = \sqrt{x^۲ + ۱} + \frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲ + ۱}} > ۰$

این تابع همواره مثبت است و نمی‌توان در آن $y'_۱ \cdot y'_۲ = -۱$ یافت.

گزینهٔ (۲) $\Rightarrow y' = ۱ + \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}} > ۰$

گزینهٔ (۳) $\Rightarrow y' = ۲\cos ۲x \Rightarrow y'_۱ = ۲\cos ۲x_۱ \ , \ y'_۲ = ۲\cos ۲x_۲$

$$y'_۱ \cdot y'_۲ = -۱ \Rightarrow ۲\cos ۲x_۱ \times ۲\cos ۲x_۲ = -۱ \Rightarrow \cos ۲x_۱ \cdot \cos ۲x_۲ = -\frac{۱}{۴}$$ جواب دارد.

گزینهٔ (۴) $\Rightarrow y' = -\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲} \to y'_۱ \cdot y'_۲ = -\frac{۱}{۲}\sin\frac{x_۱}{۲} \times \left(-\frac{۱}{۲}\sin\frac{x_۲}{۲}\right)$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}\sin\frac{x_۱}{۲} \cdot \sin\frac{x_۲}{۲} = -۱ \Rightarrow \sin\frac{x_۱}{۲} \cdot \sin\frac{x_۲}{۲} = -۴$$ جواب ندارد.

پاسخنامه کلیدی

۱ . $\boxed{۱}$	۴ . $\boxed{۳}$	۷ . $\boxed{۳}$	۱۰ . $\boxed{۱}$	۱۳ . $\boxed{۲}$	۱۶ . $\boxed{۲}$	۱۹ . $\boxed{۳}$
۲ . $\boxed{۴}$	۵ . $\boxed{۳}$	۸ . $\boxed{۳}$	۱۱ . $\boxed{۱}$	۱۴ . $\boxed{۳}$	۱۷ . $\boxed{۴}$	
۳ . $\boxed{۲}$	۶ . $\boxed{۳}$	۹ . $\boxed{۴}$	۱۲ . $\boxed{۱}$	۱۵ . $\boxed{۴}$	۱۸ . $\boxed{۲}$	