فصل ۱: بانک کنکور "توان های گویا و عبارات جبری"

-۱

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}\times\frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}=\frac{10\sqrt{2}+2\sqrt{12}+15\sqrt{3}+3\sqrt{18}}{25-6}$$
$$=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{19}=\frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19}=\frac{19(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt[4]{3^2}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

پس : $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=\sqrt{2}-1$

روش دوم:

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}\times\sqrt{3})}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{27})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{8}+\sqrt{27}}-\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=\sqrt{2}-1$$

-۲

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\times\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3}=\frac{13\sqrt{3}-13}{13}=\frac{13(\sqrt{3}-1)}{13}=\sqrt{3}-1$$
$$(2-\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

پس: $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+(2-\sqrt{3})^{-1}=\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}$

-۳ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{88+18\sqrt{7}}-\sqrt{88-18\sqrt{7}}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$ ، کدام است ؟ آزمون مجدد تجربی ۴۰۱

۱) $\sqrt{14}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{88+18\sqrt{7}}-\sqrt{88-18\sqrt{7}}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}=\frac{2}{2}\times\frac{\sqrt{88+18\sqrt{7}}-\sqrt{88-18\sqrt{7}}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}=2\times\frac{\sqrt{(9+\sqrt{7})^2}-\sqrt{(9-\sqrt{7})^2}}{2\sqrt{4-\sqrt{7}}+2\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$=2\times\frac{\sqrt{(9+\sqrt{7})^2}-\sqrt{(9-\sqrt{7})^2}}{\sqrt{16-4\sqrt{7}}+\sqrt{16+4\sqrt{7}}}=2\times\frac{\sqrt{(9+\sqrt{7})^2}-\sqrt{(9-\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(\sqrt{14}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{14}+\sqrt{2})^2}}=2\times\frac{|9+\sqrt{7}|-|9-\sqrt{7}|}{|\sqrt{14}-\sqrt{2}|+|\sqrt{14}+\sqrt{2}|}$$

$$=2\times\frac{9+\sqrt{7}-9+\sqrt{7}}{\sqrt{14}-\sqrt{2}+\sqrt{14}+\sqrt{2}}=2\times\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{14}}=2\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

-۴

می‌دانیم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ است.

$$A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^2 \times \sqrt[3]{2^4}} \times 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{4}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}}$$

$$= \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{10}{15}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^2$$

پس: $(2A)^{-\frac{1}{3}} = (2 \times 2^2)^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$

-۵

مقدار A را به ساده‌ترین حالت ممکن درمی‌آوریم:

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1.5} = \sqrt[5]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}}(2^2 \times 3)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt[5]{3^{\frac{5}{2}}}\left(2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} \times 2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-3} = 3^{-1} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

پس: $(1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}} = (1 + 24)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

-۶

$$a = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

اکنون با استفاده از اتحادهای $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ و $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ به حل مسئله می‌پردازیم:

$$\left(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2}\right)^2\left(a + \frac{1}{a} - \sqrt{2}\right)^2 = \left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - (\sqrt{2})^2\right]^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2\right)^2 = \left(2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}}_{\text{گویا می‌کنیم}}\right)^2$$

$$= \left(2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}_{4-3}\right)^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 = 4^2 = 16$$

-۷

طبق فرض داریم:

$$a^{\frac{۱}{۷}} = ۲۷a^{\frac{۱۵}{۷}} \Rightarrow ۲۷a^{۲} = ۱ \Rightarrow a^{۲} = \frac{۱}{۲۷} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} : \frac{\frac{۱}{a} - ۳}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳} - ۳}{۱ + \sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{۳(\sqrt{۳} - ۱)^{۲}}{۲} = \frac{۳(۴ - ۲\sqrt{۳})}{۲} = ۶ - ۳\sqrt{۳}$$

-۸

می‌دانیم: $۵۴ = ۲۷ \times ۲ = ۳^{۳} \times ۲ \quad , \quad ۱۲ = ۳ \times ۴ = ۳ \times ۲^{۲}$

$$\sqrt[۶]{۲^{۲} \times ۳} \times \sqrt[۴]{۳^{۳} \times ۲} \times \sqrt[۱۲]{۲^{۵} \times ۳} = \sqrt[۲۴]{(۲^{۲} \times ۳)^{۴} \times (۳^{۳} \times ۲)^{۶} \times (۲^{۵} \times ۳)^{۲}}$$

$$= \sqrt[۲۴]{۲^{۸} \times ۳^{۴} \times ۳^{۱۸} \times ۲^{۶} \times ۲^{۱۰} \times ۳^{۲}} = \sqrt[۲۴]{۲^{۲۴} \times ۳^{۲۴}} = ۶$$

-۹

طبق فرض داریم:

$$a^{\frac{۱}{۷}} = ۲۷a^{\frac{۱۵}{۷}} \Rightarrow ۲۷a^{۲} = ۱ \Rightarrow a^{۲} = \frac{۱}{۲۷} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} : \frac{\frac{۱}{a} - ۳}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳} - ۳}{۱ + \sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{۳(\sqrt{۳} - ۱)^{۲}}{۲} = \frac{۳(۴ - ۲\sqrt{۳})}{۲} = ۶ - ۳\sqrt{۳}$$

-۱۰

با استفاده از اتحاد مزدوج و با در نظر گرفتن $A = \alpha^{۲} + \beta^{۲}$ و $B = \alpha\beta$ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^{۲} + \beta^{۲} - \alpha\beta)(\alpha^{۲} + \beta^{۲} + \alpha\beta) = (\alpha^{۲} + \beta^{۲})^{۲} - (\alpha\beta)^{۲} = \alpha^{۴} + \beta^{۴} + ۲\alpha^{۲}\beta^{۲} - \alpha^{۲}\beta^{۲} = \alpha^{۴} + \beta^{۴} + \alpha^{۲}\beta^{۲}$$

مقادیر α و β را در عبارت به‌دست‌آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} - ۴}\right)^{۴} + \left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} + ۴}\right)^{۴} + \left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲} - ۴\right)}\right)^{۲}\left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲} + ۴\right)}\right)^{۲}$$

$$= \left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} - ۴}\right)^{۴} + \left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲} + ۴}\right)^{۴} + \left(\sqrt[۴]{\left(۳\sqrt{۲} - ۴\right)\left(۳\sqrt{۲} + ۴\right)}\right)^{۲}$$

$$= ۳\sqrt{۲} - ۴ + ۳\sqrt{۲} + ۴ + \sqrt{۲} = ۷\sqrt{۲}$$

-۱۱

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2\\&=(a-b)^4(a+b)^4=(a^2-b^2)^4=(a^4+b^4-2a^2b^2)^2\\&=(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-4\sqrt{6-4})^2=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2\\&=(2\sqrt{2})^2(\sqrt{3}-1)^2=8(3+1-2\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

-۱۲

طبق فرض داریم:

$$(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\times(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[3]{A}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}(2-\sqrt{3})^{\frac{9}{2}}(2+\sqrt{3})^4\times\sqrt{2}=A$$

$$\Rightarrow(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times(2-\sqrt{3})^4\cdot(2+\sqrt{3})^4\times\sqrt{2}=A$$

$$\Rightarrow A=((2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{2})\times(4-3)^4=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$$

-۱۳

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=A>0$$

$$\Rightarrow A^2=(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2\sqrt{4-3})\times\left(\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}\right)^2=6\times2=12\Rightarrow A=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

-۱۴

داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}=\frac{(\sqrt[3]{x^4}+1+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2}-1)}{\sqrt[3]{x^2}}=2\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^2}}=2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow x^2-1=2x\Rightarrow x^2-2x-1=0$$

می‌دانیم معادلهٔ درجهٔ ۲ به‌صورت x^2-sx+p است. درواقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.

داریم:

$$x_1+x_2=s=2$$

-۱۵

در فرض سؤال در سمت چپ، مخرج مشترک گرفته و داریم:

$$\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^3-1}=2 \Rightarrow \frac{a^3-1+a^3+1}{(a^3+1)(a^3-1)}=2 \Rightarrow \frac{2a^3}{a^6-1}=2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^6-1}=1 \Rightarrow a^6-1=a^3 \Rightarrow a^6=a^3+1 \quad (1)$$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3}+1}+\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3}+1}\right)^{1401}=\left(\frac{a^3+\sqrt{a^3}+1+a^3-\sqrt{a^3}+1}{(a^3+1-\sqrt{a^3})(a^3+1+\sqrt{a^3})}\right)^{1401}=\left(\frac{2a^3+2}{(a^3+1)^2-a^3}\right)^{1401}$$

$$\xrightarrow{(1)}\left(\frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3}\right)^{1401}\xrightarrow{(1)}\left(\frac{2a^3+2}{a^3+1+2a^3+1-a^3}\right)^{1401}=\left(\frac{2a^3+2}{2a^3+2}\right)^{1401}=1^{1401}=1$$

-۱۶

می‌دانیم $2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$، پس عبارت $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}$ را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

با فرض $A=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$ داریم:

$$A^2=\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}<\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$A^2=6-2\sqrt{9-5}=6-2\sqrt{4}=6-4=2 \Rightarrow A^2=2 \Rightarrow A=\pm\sqrt{2}$$

توجه کنید که $\sqrt{3-\sqrt{5}}<\sqrt{3+\sqrt{5}}$ و $A<0$، پس:

$$A=-\sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\sqrt{2})=-1$$