



۱- با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{48}{5} \quad (4)$$

$$\frac{24}{5} \quad (3)$$

$$\frac{64}{7} \quad (2)$$

$$\frac{32}{7} \quad (1)$$

$$\underbrace{a, ar, ar^2}_{\text{جملات هندسی}}$$

$$\underbrace{4a, 16ar, 14ar^2}_{\text{جملات حسابی}}$$

$$2(16ar) = 4a + 14ar^2 \Rightarrow 14ar = 4a + 14ar^2 \Rightarrow 14r = 4 + 14r^2$$

$$\Rightarrow 14r^2 - 14r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{جملات هندسی } a, a/2, a/4 \\ \text{جملات حسابی } 4a, 4a, 4a \end{cases}$$

$$(a)^2 + (a/2)^2 + (a/4)^2 = 4a + 4a + 4a \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

۲- رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

$$-8 \quad (4) \checkmark$$

$$-4 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$x \text{ رأس سهمی} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k} \quad \xrightarrow[\text{مصادف خط}]{\text{قرار در}} y = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4 = \frac{-8-4k}{k}$$

$$\text{مختصات رأس سهمی} \left(\frac{2}{k}, \frac{-8-4k}{k}\right) \xrightarrow[\text{مصادف سهمی}]{\text{قرار در}} \frac{-8-4k}{k} = k\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{k}\right) - 6 \Rightarrow k=2$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = \frac{-8-4(2)}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

۳- اگر A, B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $C - ((A - B)' - (B - C)) - C$ با کدام مجموعه برابر است؟

- $(A' \cup B') - C$ (۴) $C - (A \cup B)$ (۳) $B - (A \cup C)$ (۲) $A' - (B \cup C)$ (۱)

$$\begin{aligned}
 (A - B)' - (B - C) - C &= ((A \cap B)' \cap (B \cap C)') \cap C' = ((A' \cup B') \cap (B' \cup C')) \cap C' \\
 &= (A' \cup B') \cap (B' \cap C') = (A' \cap B') \cap C' = A' \cap (B' \cap C') = A' \cap (B \cup C)' = A' - (B \cup C)
 \end{aligned}$$

۴- کدام گزاره زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

- $p \vee q$ (۴) $r \vee p$ (۳) r (۲) q (۱)

$$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee [(p \vee q) \wedge r]$$

$$\equiv r \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)] \equiv r \wedge [\sim(p \vee q) \vee (p \vee q)] \equiv r \wedge T \equiv r$$



۵- معادله‌های $x^2 + 4x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

۷ (۴)

۴ (۳) ✓

۳ (۲)

۱ (۱)

$$x^2 + 4x + m = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-m} \quad \& \quad x^2 + 2x - 3m = 0 \Rightarrow x'_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3m}$$

$$\textcircled{1} \quad -3 + \sqrt{4-m} = -1 + \sqrt{1+3m} \Rightarrow m=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & , & x_2 = -2 \\ x'_1 = 0 & , & x'_2 = -2 \end{cases} \quad \text{عقود}$$

$$\textcircled{2} \quad -3 + \sqrt{4-m} = -1 - \sqrt{1+3m} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\textcircled{3} \quad -3 - \sqrt{4-m} = -1 + \sqrt{1+3m} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\textcircled{4} \quad -3 - \sqrt{4-m} = -1 - \sqrt{1+3m} \Rightarrow m=5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & , & x_2 = -5 \\ x'_1 = 3 & , & x'_2 = -5 \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌های غیرمشترک $= 3 - (-1) = 4$

۶- نمودار تابع $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y = 0$ و $y = -2$ واقع می‌شود؟

۴ (۴) ✓

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

$$-2 < y < 0 \Rightarrow -2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

$$\rightsquigarrow -2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow 0 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} + 2 \Rightarrow 0 < \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow x < 1 \leq x > 2$$

$$\rightsquigarrow \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x-2)} < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

استرکت بازه‌های
به دست آمده $x \in \emptyset$



۷- نقاط $A(0,1)$ و $B(4,-2)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

شیب خط $AB \rightarrow m_{AB} = \frac{-2-1}{4-0} = \frac{-3}{4}$

فاصله خط $AB \rightarrow |AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

شیب خط $AD = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \rightarrow y_{AD} = \frac{4}{3}x + 1$

مختصات نقطه D را به صورت $(t, \frac{4}{3}t + 1)$ در نظر می‌گیریم.

$|AD| = 5 \Rightarrow \sqrt{(t-0)^2 + (\frac{4}{3}t + 1 - 1)^2} = 5 \Rightarrow t^2 + (\frac{4}{3}t)^2 = 25$

$\Rightarrow t^2 + \frac{16}{9}t^2 = 25 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3$ در ربع سوم $t = -3$

۸- توابع $f(x) = \log(2x-5)$ و $g(x) = x + \sqrt{2x-4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ محور y ها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

- (۱) $4 - \sqrt{2}$ (۲) $4 - \sqrt{3}$ (۳) $4 + \sqrt{2}$ (۴) $4 + \sqrt{3}$

$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$

$(f \circ g)^{-1}(0) = \alpha \Rightarrow f \circ g(\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(\alpha) = t \\ f(t) = 0 \end{cases}$

$f(t) = 0 \Rightarrow \log(2t-5) = 0 \Rightarrow 2t-5 = 1 \Rightarrow t = 3$

$g(\alpha) = 3 \Rightarrow \alpha + \sqrt{2\alpha-4} = 3 \Rightarrow \sqrt{2\alpha-4} = 3-\alpha \Rightarrow 2\alpha-4 = 9-6\alpha+\alpha^2$

$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + \sqrt{3} & \text{غلط} \\ x_2 = 4 - \sqrt{3} & \text{صواب} \end{cases}$



۹- نمودار $f(x) = 2 + 2^{b-x}$ نمودار تابع $g(x) = -x^2 - 3x + 8$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر

$f^{-1}(10) = -1$ باشد، مقدار $2b - a$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۳ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱) ✓

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 2 + 2^{b-a} = 4 \Rightarrow 2^{b-a} = 2 \Rightarrow b-a = 1$$

$$f^{-1}(10) = -1 \Rightarrow f(-1) = 10 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 10 \Rightarrow 2^{b+a} = 8 \Rightarrow b+a = 3$$

$$\begin{cases} b-a = 1 \\ b+a = 3 \end{cases} \Rightarrow b=2, a=1 \Rightarrow 2b-a = 2(2) - 1 = 3$$

۱۰- معادله $\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$ دارای چند جواب مثبت است؟

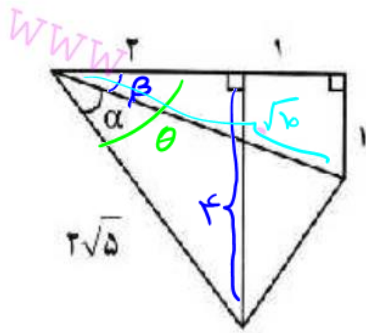
(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱ ✓

$$\frac{x(x+2)(x^2-2x+4)}{x(x+2)(x^2-2x+4)} \rightarrow (x^2-2x+4) - (x^2-9x-2) = 4x(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 4 - x^2 + 9x + 2 - 4x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{2}{1} \end{cases}$$

۱۱- در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟



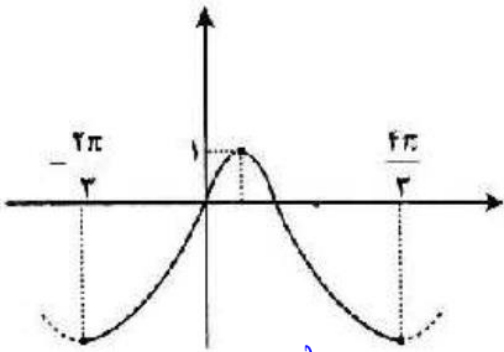
sanjesh

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{10}$
- (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

$$\cos(\alpha) = \cos(\theta - \beta) = \cos(\theta)\cos(\beta) + \sin(\theta)\sin(\beta)$$

$$= \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{4}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c-a)$ کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴ ✓
- (۴) ۶

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

$$T = \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 1$$

$$\max = a + |b| = 1$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 0 \\ a + b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow b(c-a) = 4$$

سرع لعدری $\rightarrow bc > 0$

۱۳- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

$\frac{\pi}{4}$ (۴)

$\frac{2\pi}{3}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

$$\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

جواب‌ها در بازه مورد نظر $-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \rightarrow \frac{-\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

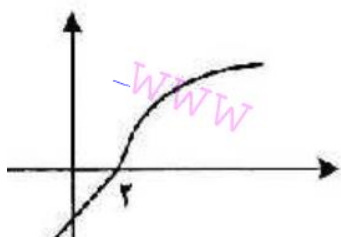
۱۴- اگر $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟

۱ (۱)

۲ (۳)

۳ (۴)

۴ (۴)



$$g(f(g(x+2))) = 0$$

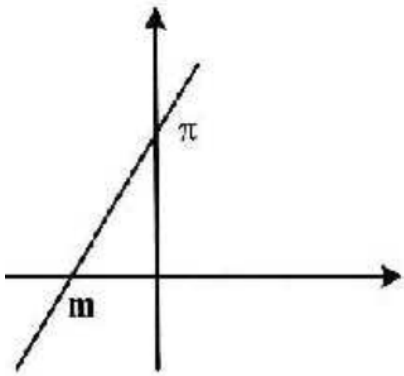
$$g(2) = 0 \Rightarrow f(g(x+2)) = 2$$

$$\left|\frac{1}{2}x - 1\right| = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x+2) = 2 \\ g(x+2) = -2 \end{cases} \rightarrow \text{با توجه به نمودار ۲ مقدار x وجود دارد}$$



۱۵- شکل زیر، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



(۱) $-\sqrt{\pi}$

(۲) $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

(۳) $-\frac{1}{\pi}$

(۴) $-\pi\sqrt{\pi}$

$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow f(x) = \frac{-m}{\pi}x + m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{\frac{-m}{\pi}x + m} = \frac{-\frac{\pi}{m}}{-\frac{m}{\pi}} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi \Rightarrow m^2 = \pi$$

$$\Rightarrow m = \pm\sqrt{\pi} \xrightarrow{\text{بجایگزین}} m = -\sqrt{\pi}$$

۱۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} |x - |x|| & \text{زوج } [x] \\ |x - |x - a|| & \text{فرد } [x] \end{cases}$ در \mathbb{R} پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $|a|$ شامل چند عضو است؟

($a < -1$)

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

(۱) صفر

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} |0 - [0]| = 0 \\ |0 - [0 - a]| = |-[-a]| = [-a] \end{cases}$$

$$\Rightarrow [-a] = 0 \Rightarrow 0 \leq -a < 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0 \quad \times$$



۱۷- تابع $f(x) = \frac{x}{1-x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

$$x > 0 : f(x) = \frac{x}{1-x|x|} = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow$ ریشه ندارد

ریشه $(1-x^2)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x > 0} x = +1 \notin D_f$

$$x < 0 : f(x) = \frac{x}{1-x(-x)} = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x < 0} x = -1$

ریشه دارد

۱۸- به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x-3|\sqrt{ax}$ در

نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۸ (۲)

۲ (۱)

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{|4x-3|\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{(4x-3)\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{4(x - \frac{3}{4})\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = 4\sqrt{\frac{3}{4}a}$$

$$f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{|4x-3|\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{-(4x-3)\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} \frac{-4(x - \frac{3}{4})\sqrt{ax}}{x - \frac{3}{4}} = -4\sqrt{\frac{3}{4}a}$$

اختلاف $= 8\sqrt{\frac{3}{4}a} = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$



۱۹- نمودار تابع $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5$ محور x ها را در α و β قطع می کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

$$2 + \sqrt{3} \quad (4)$$

$$2 - \sqrt{5} \quad (3)$$

$$2 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$2 + \sqrt{5} \quad (1)$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(2-m)}{m^2-1} = \frac{m-2}{m^2-1} = g(m)$$

$$g'(m) = \frac{-m^2 + 4m - 1}{(m^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -m^2 + 4m - 1 = 0 \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} \rightarrow \max = 2 + \sqrt{3} \\ \rightarrow \min = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{ریشه ضعیف} = (m^2-1)^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \notin D_g$$

البته در این سوال مقدار $2 + \sqrt{3}$ ماکزیم بنی است و اگر $m \rightarrow 1$ میل کند $S \rightarrow \infty$ می شود.

۲۰- ۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می کنند؟

$$96 \quad (4)$$

$$72 \quad (3)$$

$$48 \quad (2)$$

$$24 \quad (1)$$



$$2!$$

$$4! \times 2! = 48 \quad \text{کل حالت}$$

$$4!$$



۲۱- در برناب همزمان دو ناس، اعداد روشده III و II هستند. با کدام احتمال، معادله $x^2 - m x + n = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است؟

$\frac{4}{9}$ (۴)

$\frac{5}{6}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(1)(n) > 0 \Rightarrow m^2 - 4n > 0 \Rightarrow m^2 > 4n$$

اگر اعداد روشده را به صورت زوج (m, n) نشان دهیم، زوج مرتب‌های زیر در معادله بالا همانی اند.

۲ حالت $\rightarrow (3, 2), (3, 1)$

۳ حالت $\rightarrow (4, 3), (4, 2), (4, 1)$

۶ حالت $\rightarrow (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 1)$

۶ حالت $\rightarrow (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 1)$

$$\Rightarrow P = \frac{2+3+6+6}{36} = \frac{17}{36} \quad \text{درگزینهایت!}$$

۲۲- پیشامدهای ناسازگاز A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B'|A')$ کدام است؟

$\frac{5}{75}$ (۴)

$\frac{5}{55}$ (۳)

$\frac{5}{5}$ (۲)

$\frac{5}{7}$ (۱)

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{4})}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5} = 0.2$$