گسسته

علی احمدی قزل دشت

aliahmadimath.ir

نظریه اعداد

گراف و مدلسازی

ترکیبات

۴۰۱-۴۰۲

با یاد علم و آفرینندگانش

کتاب گسسته به جرات متفاوت ترین کتابی است که تا حالا داشته اید .

چند توجه در ابتدای این درس:

۱- حفظ نکنید
با حفظ کردن کاری پیش نمیبرید ؛ حتی نمره پایانی را هم نمیتوانید بگیرید

۲- تمرین و مثال تکراری حل کنید .
در بعضی از درس ها شما باید سوال جدید حل کنید ، اما تجربه من میگه در گسسته سوال تکراری حل کن ! به مرور معجزه حل سوال تکراری رو میبینی!

۳- در این جزوه نکات تستی گفته نشده، خب دلیلیش هم خیلی مشخصه : چون این نسخه جزوه تشریحی کتاب گسسته است که صرفا کتاب را پوشش داده . میتونید جزوه تکمیلی من که مربوط به (نکات تستی) است را مطالعه کنید تا دستتون در تست هم گرم شود.

۴- در این جزوه تمام فعالیت ها ، تمرین ، کاردرکلاس ونکاتی که در متن کتاب درسی است برایتان آورده شده .و علاوه بر آنها در جاهایی که نیاز به تمرین بیشتر بود برایتان آوردم

۵- در انتهای جزوه تمامی نمونه سوالات امتحان نهایی نظام جدید ، به شکل اصلی برایتان آورده شده تا از نظر نمونه سوال هم خیالتان راحت باشد .

۶- سوالات مهم و محتوی های آموزشی جذابی در کانالهای ارتباطی من تهیه شده که اسکن بارکد زیر میتونید اونها رو دنبال کنید .

فهرست مطالب

فصل اول:

آشنایی با نظریه‌ی اعداد

از این فصل در امتحان ترم اول ۱۵ نمره و در ترم دوم ۵ نمره و اگر خرداد مردود شوید در امتحان شهریور ۷ نمره دارد.

برای استفاده بهتر از سایر محتویات درس ریاضی کنکور صفحات های زیر را دنبال کنید.

درس ۱ – استدلال ریاضی

تعریف استدلال: درک وفهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی است.

انواع استدلال:

۱– مثال نقض: آوردن یک مثال است که درستی یک حکم را در حالت کلی رد می‌کند.

توجه: مثال نقض اصلاً روش اثبات نیست و فقط برای نشان دادن نادرستی حکم استفاده می‌شود.

مثال) آیا $۲^n + ۱$ همواره عددی اول است؟ خیر با قرار دادن $n = ۹$ داریم $۲^۹ + ۱ = ۵۱۳$ که عددی است بر ۳ بخش‌پذیر.

یادآوری: عدد اول یعنی بر هیچ عددی به جز ۱و خودش بخش‌پذیر نباشد.

۲– اثبات مستقیم: برای اثبات مستقیم ابتدا باید قضیه خواسته شده را به زبان ریاضی بنویسیم و بعد با اصول و قواعد صحیح ریاضی نتیجه‌گیری می کنیم

برای انجام اثبات مستقیم به نمایش‌های زیر توجه کنید.

(عددزوج: $۲k$) (عدد فرد: $۲k + ۱$) (عدد مضرب n: nk) (عدد مربع کامل $k^۲$) (عدد مکعب کامل $k^۳$) (عدد مربع کامل فرد $(۲k + ۱)^۲$) (دو عدد فرد متفاوت $۲k + ۱, ۲k' + ۱$) (دو عدد فرد متوالی $۲k - ۱, ۲k + ۱$) (دو عدد زوج متفاوت $۲k, ۲k'$) (دو عدد زوج متوالی $۲k, ۲k + ۲$) (عددگویا $\frac{a}{b} | b \neq ۰$) (عددصحیح k) (دو عدد صحیح متوالی $k, k + ۱$)

تمرین) ثابت کنید تفاضل مکعب دو عدد صحیح متوالی در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده ۱ دارد.

تمرین) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n} + ۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

تمرین) هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ج) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

چ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.

۳- اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه‌ی موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن عبارت را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد.با توجه به هم‌ارزی

$p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوه‌ی اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره‌ی دلخواه داریم: $P_۱ \vee P_۲ \vee \ldots P_n \Rightarrow r \equiv (P_۱ \Rightarrow r) \wedge (P_۲ \Rightarrow r) \wedge \ldots (P_n \Rightarrow r)$

تمرین) ثابت کنید برای هر عددی طبیعی n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

تمرین) ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عبارت $۳n^۲ + n + ۵$ عددی فرد است؟

تمرین) ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

تمرین) ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی باشند و $xy + ۱ = x + y$ آنگاه $x = ۱$ یا $y = ۱$.

تمرین) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.

تمرین) $A = \{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ است و $n \in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

۴– اثبات غیر مستقیم (اثبات به روش برهان خلف)

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیر مستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیر ممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات ومحاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه مورد نظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

تمرین) ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

تمرین) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

تمرین) a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

تمرین) درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۵– اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم.

در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P، Q و R سه گزاره باشند و $R \Leftrightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow P$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی و یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر: آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.