هندسه ۳

کتاب‌کار تشریحی

سال دوازدهم
رشته ریاضی
۴۰۲-۴۰۱

علی احمدی

aliahmadimath.ir

ماتریس و کاربرد ها
آشنایی با مقاطع مخروطی
بردارها

فهرســت کلی کتاب هندســه ۳

فصل اول

ماتریس و کاربرد ها

برای استفاده بهتر از جلسات کلاس حضوری از محتویات سایت **aliahmadimath.ir** استفاده کنید .

ارتباط با سایر صفحات مرتبط با کلاس
(اسکن QR مقابل)

مقدمه:

یکی از کاربردی ترین مباحث در ریاضی مبحث ماتریس است، امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه های دیگر علم مثل فیزیک، کامپیوتر، آمار، حسابداری، پزشکی، جامعه شناسی، زمین شناسی و.... استفاده می شود. در ریاضیات کاربردی که بیشتر با حل دستگاه های معادلات و نامعادلات کار می شود، هم ماتریس نقش اساسی را دارد.

درس اول: ماتریس و اعمال روی آن

معرفی ماتریس :

معمولاً ماتریس ها را با حروف بزرگ مانند A، B و C و ... نام گذاری می کنیم. ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن درایه می گوییم.

هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس A، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبهٔ ماتریس A، $m \times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می دهیم.

a_{ij} یعنی درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس A .

ماتریس مقابل دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، پس مرتبهٔ آن ۲×۳ است.

$$\begin{array}{cl} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} & \end{array}$$

درایهٔ a_{21} را در نظر بگیرید! این درایه در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

- اگر $m = n = 1$ در این صورت ماتریس $[K]_{1\times 1}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می کنیم.

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **و** $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **باشند،**

الف) مرتبه هرکدام از ماتریس ها را بنویسید.

ب) درایه های زیر را شناسایی کنید

$a_{12} =$ $\quad a_{31} =$ $\quad b_{22} =$ $\quad c_{21} =$

۲- با توجه به ماتریس مقابل جاهای خالی را پر کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & 25 & \pi & 14 \end{bmatrix}$$

$a_{12}^2 + \sqrt{a_{32}} - a_{42} = \cdots$

۳- اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ ماتریسی 2×2 باشد و برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 5$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = -2$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش نمایش دهید.

۴- اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 4}$ ماتریسی 3×4 باشد به طوری که برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = i + j$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

۵- با توجه به تعاریف زیر ماتریس A و B را تشکیل دهید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

۶- برای ماتریس مقابل یک ضابطه بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

معرفی ماتریس های خاص:

۱. ماتریس صفر

ماتریسی را که تمام درایه های آن صفر باشند، ماتریس صفر می نامند. معمولاً ماتریس صفر از مرتبه $n\times p$ را با نماد $\bar{O}_{n\times p}$ نمایش می دهند. در زیر چند ماتریس صفر نمایش داده شده اند.

$$\bar{O}_{۱\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{O}_{۲\times۴}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{O}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲. ماتریس سطری

ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد، ماتریس سطری می نامند. $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۵ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}_{۱\times۵}$

۳. ماتریس ستونی

ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی می نامند. $A=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$

۴. ماتریس مربعی

اگر تعداد سطرها و ستون های یک ماتریس با هم برابر باشند، آن ماتریس را ماتریس مربعی می نامند.

اگر A ماتریسی از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، اصطلاحاً آن را ماتریس مربعی از مرتبهٔ n می نامند و معمولاً با A_n نمایش می دهند.

تعریف قطر اصلی در ماتریس مربعی: در هر ماتریس مربعی، درایه هایی که شمارهٔ سطر و ستون آن ها برابر باشند، قطر اصلی را تشکیل می دهند؛ به بیان دیگر در یک ماتریس مربعی، تمام درایه هایی که به صورت a_{ii} هستند روی قطر اصلی قرار دارند.

در یک ماتریس مربعی، درایه هایی که روی قطر عمود بر قطر اصلی قرار دارند، قطر فرعی ماتریس را تشکیل می دهند.

در ماتریس مربعی مقابل، قطرهای اصلی و فرعی نمایش داده شده اند.

قطر اصلی

قطر فرعی

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

۵. ماتریس قطری

ماتریس مربعی را که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری می نامند. (توجه داشته باشیم که درایه های روی قطر اصلی می توانند صفر باشند و می توانند مخالف صفر باشند.) در زیر چند ماتریس قطری ارائه شده اند:

$$A=[۵] \text{ ، } B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ ،} C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۶. ماتریس اسکالر

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می نامند. در زیر چند ماتریس اسکالر ارائه شده اند؛

$$A=[۵] \text{ ، } B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix} \text{ ،} C=\begin{bmatrix} K & ۰ & ۰ \\ ۰ & K & ۰ \\ ۰ & ۰ & K \end{bmatrix}$$